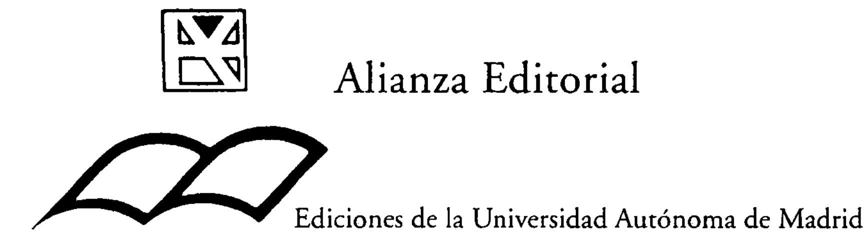
Richard Dedekind

¿Qué son y para qué sirven los números?

y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática

Edición e introducción a cargo de José Ferreirós



Indice

INTRODUCCIÓN

Los escritos aquí traducidos se sitúan en una auténtica encrucijada: entre la matemática elemental y la superior, entre la tradicional y la de nuestro siglo. Responden al antiguo problema de fundamentar la aritmética, que hasta mediados del XIX había sido exclusivamente tema de manuales elementales, pero que por la presión de las necesidades de fundamentación del análisis, en primer plano desde 1800, tendía a ocupar un lugar cada vez más central. El autor es un algebrista de primer rango, precursor de los enfoques estructurales de nuestro siglo (Bourbaki), que en el curso de sus investigaciones se ha ido convenciendo del papel básico de los conjuntos en la matemática, y que en su correspondencia con Georg Cantor ha tomado parte en algunos de los capítulos más famosos del nacimiento de la teoría de conjuntos.

Al contestar una de las preguntas más elementales que se pueden plantear, *¿Qué son y para qué sirven los números?*, Dedekind va a delinear simultáneamente el marco general de su concepción de toda la matemática pura: la aritmética, el álgebra, el análisis, encuentran un fundamento común en la teoría de conjuntos y aplicaciones. Por este motivo, el libro de 1888 titulado con esa pregunta es el centro del planteamiento de Dedekind, en torno al cual hay que entender los demás escritos.

Esta introducción tratará de facilitar la labor de comprensión a base de comentarios históricos que permitan ver qué lineas se anudan en los escritos de Dedekind. Progresivamente iremos pasando revista al problema clásico de la fundamentación de la aritmética, a la formación matemática de Dedekind, al desarrollo de su mentalidad conjuntista en investigaciones algebraicas, y a sus primeras ideas sobre la fundamentación de la aritmética. Luego analizaremos las ideas clave, el contexto y la repercusión de los dos escritos principales, comentando en un apartado especial su relación con Cantor; para terminar, atenderemos a la filosofía de la matemática del autor, que da lugar a una postura logicista, en el sentido que tuvo esta expresión en el siglo XIX.

1. EL PROBLEMA DE LA ARITMÉTICA EN PERSPECTIVA HISTÓRICA.

La aritmética y las ramas superiores de la matemática que hasta cierto punto pueden considerarse derivados suyos, el álgebra y el análisis, fueron 'ciencias' carentes de un fundamento adecuado durante un larguísimo período, desde el siglo XVI hasta el XIX. La figura de Dedekind es una de las centrales en el movimiento que vino a poner fin a este 'escándalo'; con ello el nivel de rigor de la matemática occidental se asimila por primera vez -y terminará superando- al de los antiguos griegos. La referencia a los griegos es de hecho esencial para entender la historia de la noción de número, porque los intentos (insatisfactorios) de fundamentar la aritmética, durante los siglos mencionados, descansaron en las teorías heredadas de los griegos.

1.1. El uso griego del término 'número' es muy estricto, y sólo nos autoriza a denominar números a los llamados números naturales.[1] Sin embargo, los griegos consideraron también 'proporciones numéricas', relaciones entre números que equivalen a nuestras fracciones; una proporción numérica es algo radicalmente diferente de un número. La tradición nos cuenta que los pitagóricos creyeron poder asignar un número a todo lo que existe, o sea, poder expresar todas las relaciones entre las cosas mediante proporciones numéricas. Hay que decir que esta suposición resulta muy razonable desde un punto de vista matemático; expresándolo en términos modernos, el conjunto de los números racionales (fracciones) es denso, esto es, entre cada dos números racionales existe otro (y por tanto infinitos). ¿Por qué habríamos de necesitar un conjunto más 'completo'? Sin embargo, el descubrimiento de la inconmensurabilidad del lado y la diagonal de un cuadrado puso un brusco fin a esa suposición pitagórica; en términos modernos, se había demostrado la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

Los matemáticos griegos interpretaron su descubrimiento en el sentido de que las proporciones numéricas no son un medio suficientemente general para expresar las relaciones entre todas las cosas aceptadas, y que la geometría es más general que la aritmética, ya que las relaciones geométricas no son subsumibles bajo relaciones aritméticas aunque sí puede decirse lo contrario; de este modo se vieron

[1] En rigor, número es una reunión de unidades, de manera que ni siquiera el uno cae bajo la denominación 'número'.

forzados a buscar una nueva teoría más general, adecuada a la geometría. El gran logro se debió a Eudoxo, y constituye una de las obras maestras de la matemática griega: fue la *teoría de las proporciones* expuesta por Euclides. Esta teoría define rigurosamente lo que ha de entenderse por 'razón (proporción) entre dos magnitudes', permitiéndonos hablar con precisión de la razón entre magnitudes inconmensurables. Indiquemos aquí, como algo que se constituirá en tema central para Dedekind, que Euclides presupone la noción de magnitud, sin dar definiciones ni asunciones explícitas al respecto (ejemplos de magnitudes son un segmento, o un área, o un ángulo). De hecho la matemática griega parece considerar sus objetos como algo dado en el mundo natural, rasgo en el que se diferencia radicalmente de nuestra matemática axiomática.

Para que dos magnitudes del mismo tipo a y b tengan una razón, es necesario que satisfagan algo semejante al axioma arquimediano: han de existir números (naturales) m y n tales que $ma > b$, $nb > a$.[2] Decimos que dos razones, $a:b$, $c:d$, son iguales si y sólo si, para cada par de números m,n,

o bien $na > mb$ y $nc > md$;
o bien $na = mb$ y $nc = md$;
o $na < mb$ y $nc < md$.[3]

Con esto, las proporciones entre magnitudes resultan ser matemáticamente tan manejables como las proporciones numéricas; la teoría se usa, por ejemplo, para demostrar que las áreas de triángulos de igual altura guardan entre sí las mismas razones que sus bases (*Elementos*, VI.1).

La teoría de las proporciones de Eudoxo guarda una profunda relación con la teoría de los números irracionales de Dedekind, como indicará Rudolf Lipschitz y como se ha venido repitiendo desde entonces;[4] más adelante indicaremos cuál es esta relación.

1.2. Volviendo a la historia de los números, durante la Edad Media y el Renacimiento aparecen novedades que se deben a la influencia árabe: el sistema de numeración posicional dio pie al establecimiento de

---

[2] Euclides supone implícitamente que cada tipo de magnitudes admite una adición, y esto abre el camino a la definición del producto de un número por una magnitud: ma es igual a la suma de m términos $a+a+...+a$.

[3] *Elementos*, libro V, definiciones 4 y 5.

[4] Cf. un tratamiento matemático sofisticado en W. Krull, 'Zahlen und Grössen. Dedekind und Eudoxos', *Mitteilungen des mathematischen Seminars der Universität Giessen* 90 (1971), 29-47; para un punto de vista histórico centrado en los griegos, H. Stein, 'Eudoxos and Dedekind: On the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics', *Synthese* 84 (1990), 163-211.

algoritmos de cálculo sencillos (como los que aprendimos de niños) y, bajo la presión de la práctica del cálculo, el uso de la palabra 'número' se amplía. Ya los matemáticos indios habían empleado el cero y los números negativos, empleando analogías como la del 'debe y haber' para justificar este paso. Las fracciones pasarán enseguida a engrosar las filas del 'número', y finalmente, en conexión con la resolución de ecuaciones algebraicas, se admiten las 'irracionalidades' como $\sqrt{2}$ y los números 'imposibles', 'sordos' o 'imaginarios', formados con $\sqrt{-1}$. La razón de estas transformaciones fue sencilla: todos esos 'números' pueden operarse de acuerdo con idénticas reglas de cálculo, para dar lugar a resultados correctos. Pero la extensión de la noción de número era ante todo pragmática, y carecía de una justificación comparable a la de las teorías griegas. El paso que se había dado permitió el desarrollo del álgebra y del análisis, pero durante tres siglos se emplearán definiciones del número que no justifican toda la extensión dada al término.

Ya durante la época renacentista surgió la pregunta de si las fracciones y los irracionales son "verdaderos números". En 1585, Simon Stevin da la idea de una solución que imperará durante tres siglos, al proponer una nueva definición: "número es aquello mediante lo que se explica la magnitud de alguna cosa".[5] En realidad, la idea que encontramos aquí no es nada especialmente original: se trata de identificar 'número' con 'proporción entre magnitudes' en el sentido de los griegos. La teoría de las proporciones de Eudoxo se convierte así en la base de la nueva aritmética generalizada, cosa que en ningún momento fue la intención de los griegos. Este enfoque tuvo aceptación general, y entre sus partidarios podemos citar hombres de la talla de Descartes, Newton, Leibniz; la lista podría continuarse hasta llegar nada menos que a Cauchy, y en este libro tendremos ocasión de ver a Rudolf Lipschitz, matemático de primer rango contemporáneo de Dedekind, abogar de nuevo por esta teoría. La definición de Newton puede servirnos como resumen; en ella se resalta explícitamente la diferencia con respecto a los griegos:

> Entendemos por número no tanto una multitud de unidades cuanto la razón entre una cantidad abstracta cualquiera y otra del mismo género que se toma por unidad.[6]

---

5 *L'arithmetique*, fol. 1v, def. II; cit. en Gericke, 'Zur Geschichte des Zahlbegriffs', *Mathematische-physische Semesterberichte* **18** (1971), 164.

6 *Arithmetica universalis* (1707); cit. en Pringsheim 'Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse', *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* **1** (1898) 1, 51.

Este tipo de definición supone sin duda un avance, porque justifica que denominemos 'número' a cualquier proporción que nos encontremos, con lo que alcanzaremos sin duda *gran parte* de los números reales positivos.

Como indica Dedekind en su correspondencia con Lipschitz, mientras no dispongamos de una teoría más precisa de las magnitudes en que se basa nuestra definición (ya hemos indicado que Euclides no ofrece nada así, y sus seguidores no avanzarán en este sentido), ese 'gran parte' es esencial: no podremos probar que hemos definido *todos* los reales positivos. Dedekind hace su crítica más concreta: Euclides puede haber supuesto intuitivamente la continuidad del espacio, pero no introduce en ningún momento ese supuesto de manera explícita, sin duda porque no lo necesita; ahora bien, si pretendemos definir adecuadamente los números reales positivos, la continuidad del dominio de magnitudes es esencial. Esta objeción no es puramente teórica, sino que tuvo implicaciones prácticas patentes en la fundamentación del análisis.

Durante el XVIII, el cálculo se había elevado a la categoría de método esencial para la aplicación de la matemática al conocimiento de la naturaleza, y se había convertido en un conjunto de técnicas enormemente flexibles. Pero los fundamentos no estaban nada claros, como se encargarían de señalar diversos autores. El cálculo del dieciocho hacía uso de nociones como las de infinitésimo, cantidad evanescente, diferencial, que carecían totalmente de una fundamentación adecuada. Newton aclaraba esas nociones hablando de 'cantidades nacientes', es decir, de los valores que tomaba una 'magnitud variable' en el preciso instante en que dejaba de ser cero, sin llegar a ser todavía una cantidad finita (entendiendo por cantidad finita un número real). Y la cosa no paraba aquí: si los diferenciales eran difíciles de entender, ¿qué diremos de los diferenciales de diferenciales, o diferenciales de segundo orden?; ¿y de los de tercer orden, etc.?; y ¿qué había que pensar del modo en que se calculaba con infinitésimos, a veces dividiendo por ellos, y a veces igualándolos a cero, cosas ambas que son incompatibles? Como decía George Berkeley: "no puede hablarse de ciencia cuando se procede a ciegas y se llega a la verdad no sabiendo cómo ni por qué medios".[7]

[7] *El Analista* (Londres, 1734), par. 22. El libro se subtitula "discurso dirigido a un matemático infiel, donde se examina si los objetos, principios e inferencias del análisis moderno están formulados de manera más clara, o deducidos de manera más evidente, que los misterios religiosos o los asuntos de la fe". Desde luego, no ayudaban a evitar las críticas frases como la que se atribuye a d'Alembert dirigiéndose a los principiantes en el estudio del cálculo: "adelante, que la fe ya os vendrá".

Frente a esta situación se idearon distintas justificaciones: algunos hablaban de que en el cálculo se daba una compensación de errores (Carnot), otros propusieron que se reemplazaran los infinitésimos por límites de cantidades finitas, otros intentaron reducir el análisis al álgebra (Lagrange). Como es bien sabido, a principios del siglo XIX se dio con una solución que obtendría aceptación general, utilizando sistemáticamente la noción de límite y el cálculo con desigualdades. Partidarios de la noción de límite fueron matemáticos como Gauss y Bolzano, pero fue Cauchy quien tuvo el honor de asociar su nombre con la reforma del rigor en análisis. En sus libros de texto, y poniendo como base la noción de función continua y la teoría de límites, mostró de qué manera podía evitarse toda la confusión de sus predecesores. Pero aunque de este modo se lograba reducir la teoría a una serie de teoremas básicos, estos mismos teoremas no pudieron demostrarse con rigor.

El ejemplo típico es el teorema del valor intermedio: si una función continua toma valores positivos y negativos en un intervalo, existe un punto del intervalo en el que la función se anula. A este teorema dedicó Bolzano un famoso artículo en 1817, en el que, pese a todos sus esfuerzos, las demostraciones no llegaban a ser concluyentes. Otro ejemplo puede ser el teorema que Dedekind escoge como centro de sus reflexiones: una magnitud variable que crece siempre, pero no más allá de todo límite, se aproxima a un valor límite (o dicho en términos modernos: una sucesión creciente y acotada de números reales tiene límite). Se trata en ambos casos de teoremas básicos para el análisis, que establecen la *existencia* de cierto tipo de puntos; y es precisamente el carácter general de la demostración de existencia que se quiere establecer, lo que hace que el supuesto de la *continuidad* del conjunto de los números reales intervenga esencialmente. Por eso, sólo en el momento en que se tenga una teoría adecuada de los números reales podrán superarse totalmente las lagunas en la fundamentación del edificio del análisis.

1.3. El problema de la fundamentación del análisis fue un estímulo esencial para la formulación de teorías adecuadas de los números irracionales, pero no era el único problema relacionado con la fundamentación de la aritmética. ¿Qué pasa con los números negativos, y con los imaginarios, de los que no hemos hablado hasta aquí? Estrictamente no pueden situarse bajo la definición del número como proporción, cuestión que fue especialmente discutida en Gran Bretaña a principios del XIX; William Rowan Hamilton nos ofrece una recapitulación del problema especialmente clara:

> [...] no ha sucedido con los principios del Álgebra lo mismo que con los principios de la Geometría. [...] Pues no requiere especial escepticismo dudar, o incluso no creer, la doctrina de Negativos e Imaginarios, cuando se propone (como ha sido común) con principios como éstos: que *una magnitud mayor puede ser sustraída de una menor*, y que el resto es *menor que nada*; que *dos números negativos*, o números que denotan cantidades menores que nada, pueden ser *multiplicados* uno por otro, y que el producto será un número *positivo*, o número que denota una cantidad mayor que nada; y que aunque el *cuadrado* de un número, o el producto obtenido al multiplicar ese número por sí mismo, es por tanto *siempre positivo*, ya sea el número positivo o negativo, con todo pueden encontrarse o concebirse o determinarse números, llamados *imaginarios*, con los que se opera con todas las reglas de los números positivos y negativos, como si estuvieran sometidos a esas reglas, *aunque tienen cuadrados negativos*, y por tanto debe suponerse que no son números positivos ni negativos, ni tampoco nulos, de modo que las magnitudes que se supone que denotan no pueden ser mayores que nada, ni menores que nada, ni siquiera iguales a nada. Debe ser difícil fundar una CIENCIA sobre principios como éstos, por más que las formas de la lógica puedan construir a partir de ellos un sistema de expresiones simétrico, y por mucho que se pueda aprender un arte práctica de aplicar correctamente reglas útiles que parecen depender de ellos.[8]

Como es natural, Hamilton carga aquí las tintas: en realidad sólo algunos puristas discutían la aceptabilidad de los números negativos, sin duda porque se disponía de una perfecta y utilísima interpretación de ellos en la recta real. El asunto de los números complejos sí que fue mucho más escandaloso durante siglos, hasta que a principios del XIX se elaboró su interpretación geométrica.[9]

---

[8] 'Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a preliminary and elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time' (1837), en *Mathematical Papers*, vol. 3 (Cambridge: University Press, 1967), 4.

[9] La interpretación geométrica fue formulada entre otros por Argand y Gauss; la idea, tal como la expone Gauss, es tomar la unidad real en el eje de las x y la imaginaria en el de las y, de manera que a cada punto del plano le corresponde un único número complejo, y viceversa.

Esta interpretación geométrica parecía implicar, sin embargo, que la aritmética y el álgebra quedaban subordinadas a la geometría, cosa que contradecía la opinión habitual. La solución de esta paradoja llevó a interesantes novedades, una de las cuales la introduce el propio Hamilton en el artículo citado. Hamilton siguió defendiendo una teoría muy cercana a la tradicional en lo que toca a los números reales, pero a propósito de los números complejos introdujo una novedad esencial: los complejos se presentan como pares ordenados de números reales, y las operaciones sobre los complejos se definen gracias a operaciones sobre los números reales que intervienen en el par. Con esto aparece, en 1837, la primera utilización del método de construcción en aritmética. Este método, difundido ante todo gracias a la gran obra de Hamilton *Lectures on Quaternions* (1853), inspiró sin duda a numerosos matemáticos, que trataron de aplicarlo a las restantes extensiones del concepto de número; el más afortunado de los continuadores de Hamilton en esta empresa fue Dedekind.

1.4. En resumen, a principios del siglo XIX se tenía ya una clara conciencia de la falta de una fundamentación adecuada de la aritmética, y esa conciencia se fue acentuando como resultado del problema de la fundamentación del análisis. Muchos de los intentos de solución siguieron dependiendo de la noción de magnitud, por ejemplo los de Hermann Grassmann y Karl Weierstrass, por citar sólo algunos de los más logrados. Frente a estos contemporáneos, Dedekind fue uno de los autores que más clara y vigorosamente se opusieron a la definición del número típica de la Edad Moderna, no sólo por el motivo que hemos visto antes, sino por su exigencia constante de que "la aritmética debe desarrollarse a partir de sí misma" (*Continuidad y números irracionales*), "sin ninguna inmiscusión de representaciones extrañas (como por ejemplo la de las magnitudes medibles)" (*¿Qué son y para qué sirven los números?*). De este modo, Dedekind prescinde de la noción de magnitud y se plantea la tarea de desarrollar la aritmética en forma 'pura', para lo que hace uso de la teoría de conjuntos. A propósito de la definición de los números mediante proporciones escribió en *Continuidad y números irracionales*:

> La aparente ventaja de la generalidad de esta definición del número desparece inmediatamente si se piensa en los números complejos. Desde mi punto de vista, a la inversa, la noción de proporción entre dos magnitudes homogéneas sólo puede desarrollarse claramente cuando ya se han introducido los números irracionales.

El hecho de que todos los temas anteriores se anuden en la obra de Dedekind muestra ya suficientemente que nos encontramos frente a un enorme esfuerzo de sistematización, un gran intento de reducir la matemática a bases rigurosas y unitarias. En efecto, la teoría expuesta en *Continuidad y números irracionales* puede verse como colofón de una serie de esfuerzos encaminados a fundamentar el análisis sobre la noción de límite, y esta noción directamente sobre la aritmética; además, de las teorías del número irracional publicadas en los años 1870 es la más conscientemente conjuntista. Pero Dedekind se preocupó también por hacer posible un desarrollo riguroso de todo el sistema numérico, como acreditan sus afirmaciones publicadas y diversos manuscritos. Con ello pretendía obtener un nuevo fundamento para la aritmética y el álgebra, coherente con sus investigaciones más sofisticadas en el campo de la teoría de números algebraicos y del álgebra en general.

Ambos proyectos resultan, a fin de cuentas, no ser sino uno solo: en mi opinión, una lectura correcta de *¿Qué son y para que sirven los números?* exige que consideremos ese libro como la exposición del marco general en el que se mueve la matemática pura (aritmética, álgebra y análisis), de tal manera que la concepción allí expuesta es suficiente, en opinión de Dedekind, para recuperar todo el edificio de la matemática de su tiempo. Antes de comentar más en detalle estas cuestiones, conviene echar un vistazo al desarrollo de la carrera matemática del autor.

2. LA FORMACIÓN MATEMÁTICA DE DEDEKIND.

Sobre la vida y personalidad de Dedekind apenas daré un par de datos. Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) nació en Braunschweig (Brunswick; Alemania), donde pasaría la mayor parte de su vida, como cuarto hijo de una familia acomodada. Su padre y su abuelo paterno eran profesores del Collegium Carolinum, donde el propio Richard dará clases durante más de 30 años (este hecho nos remite al fuerte sentido de la tradición familiar que aparentemente tuvieron los Dedekind).[10] Tras ocho años como estudiante y profesor en Göttingen, Richard se traslada al

[10] El Carolinum era una especie de instituto donde se daban clases de nivel intermedio entre el bachillerato y la universidad; Dedekind estudio allí dos años. Luego se transformó en Politécnico, coincidiendo con la llegada de Richard como profesor, y en Escuela Politécnica, en parte bajo la dirección del matemático.

Politécnico de Zürich como profesor de matemática; en 1862 se hace cargo de una plaza en el Collegium Carolinum, donde trabajará el resto de su vida. Soltero, vive a partir de entonces con sus padres y su hermana mayor, y rechaza numerosas ofertas de plazas universitarias. Es evidente que ser profesor universitario no fue su mayor ambición, ya que antepuso razones familiares, económicas, y al parecer también políticas. A propósito de este último punto, digamos que a consecuencia de la anexión del reino de Hannover por Prusia Dedekind parece haber tomado una postura antiprusiana. Aproximadamente un año después de la anexión escribía a su amigo, el anatomista y profesor en Göttingen Jakob Henle:

> [...] es para mí muy difícil hacerme cargo plenamente de la actual situación en Göttingen; pero según todo lo que oigo, parece que la tensión entre los partidos políticos sigue siendo muy grande. Siempre es muy agradable pertenecer al partido vencedor, y las transformaciones del último año me han hecho ver que esa ventaja constituye para muchas personas, consciente o inconscientemente, el único regulador de su opinión. En espera de un tiempo mejor, en que el estado militar absoluto deje de considerarse el desarrollo supremo e inmejorable de nuestra vida política, de momento me retiro de una disputa que sigue siendo infructuosa; hay que esperar a que la borrachera se aplaque un poco.[11]

Sobre su personalidad digamos que era -como se ha repetido- modesto rayando en la timidez, carente de pretensiones, pero a la vez dotado de un fuerte sentido del deber y de la fidelidad a sus principios. Nunca tendió a comprometerse pública o políticamente, fue frío y reservado en sus juicios, pero amistoso, servicial y delicado en el trato personal. La música, su principal afición (tocaba el cello y el piano, al parecer muy bien), la literatura (su hermana era escritora y solían leer juntos), y los viajes y excursiones parecen haber sido sus aficiones, aunque también habría que mencionar que una vez a la semana acudía regularmente a una bolera. Era sistemático hasta rayar en manía, y probablemente algo provinciano, pero esto no le impidió adelantarse decenios al estado de la matemática de su época.

---

[11] Carta del 18.7.1867 publicada en P. Dugac, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques* (Paris: Vrin, 1976), apéndice XV, 171.

Al escribir un *currículum* con ocasión de su doctorado, el propio Dedekind resaltó el hecho de que durante su época de bachiller se interesaba sobre todo por la física y la química, considerando la matemática como una ciencia auxiliar; esto quizá refleja la influencia familiar, ya que su padre y su hermano mayor se interesaban mucho por la mineralogía, la geodesia y la agronomía. El caso es que, según escribía Dedekind, "como, no sé si por vicio o por virtud, estoy dotado de un espíritu que no me permite aprovechar felizmente en disciplina alguna si cada precepto no se apoya en los antecedentes, siguiendo un orden perpetuo y una cierta razón, en brevísimo tiempo me aplicaba principalmente con todo cuidado a la matemática, persuadido de que en la física, al menos tal como se enseña en las escuelas, no existe ese arte exacto que he indicado."[12] Esta declaración es importante, porque vemos cómo Dedekind anuncia ya a los 21 años un rasgo totalmente característico de su obra: sus escritos fueron siempre un modelo de rigor expositivo, un rigor a menudo nunca visto, y los problemas de fundamentación le ocuparon siempre más que la intención de ofrecer resultados nuevos. Hasta tal punto es así, que podemos considerar su obra como uno de los mayores esfuerzos por lograr una visión sistemática, unitaria y rigurosa de la matemática; no es casual que Bourbaki parezca considerarlo su principal ancestro.

Después del bachillerato, Dedekind estudia química, física y matemática en el Collegium Carolinum durante dos años; esto le permite profundizar en la geometría analítica, el álgebra, el cálculo diferencial e integral y la mecánica. A la vez, lee las *Disquisitiones arithmeticae* (1801) de Carl Friedrich Gauss, y todo ello le confirma en su decisión de decantarse por la matemática. Al llegar a la universidad de Göttingen su formación es suficiente para que las clases de matemática apenas le ofrezcan nada nuevo. A propósito de esto hay que recordar que nos encontramos en pleno proceso de reforma de la enseñanza universitaria: mientras en Paris y Berlin se enseñan materias de investigación avanzada, en otras universidades apenas se llega al cálculo diferencial e integral; Göttingen se sumará pronto a la lista de universidades de primer rango, pero esto sólo ocurrirá después de que Dedekind se haya doctorado y habilitado como profesor. De todos modos, Dedekind va a tener el privilegio de asistir a las clases impartidas por Gauss sobre temas elementales: método de mínimos cuadrados y geodesia superior; será además el último doctorando del 'príncipe de la matemática'. Ello motivó

[12] Reproducido en Dugac, o.c., apéndice XX, pag. 179.

un cierto contacto, del que sin embargo no hay que esperar demasiado: Gauss era un hombre muy poco accesible, que influyó principalmente por medio de sus escritos. De todos modos es interesante conocer el juicio de Gauss al presentar la tesis:

> El tratado que presenta el sr. Dedekind se ocupa de una investigación acerca del cálculo integral que de ningún modo es trivial. El autor no sólo demuestra tener muy buenos conocimientos del estado actual del campo en cuestión, sino también una independencia tal que hace albergar esperanzas con respecto a sus trabajos futuros.[13]

Pese a este juicio favorable, que animó mucho a Dedekind, los historiadores no encuentran nada de gran interés en la tesis en cuestión. Digamos también que Gauss era conciudadano de Dedekind, que ambos asistieron al mismo instituto, al Collegium Carolinum y a la misma universidad, y que hay quien encuentra similitudes entre ambos incluso a nivel de personalidad; una similaridad destacable es que ninguno de los dos estaba dispuesto a publicar una teoría hasta que tuviera una forma definitiva. Gauss fue siempre una referencia fundamental para la obra matemática de Dedekind, quien colaboró en la edición de las obras completas de su maestro; el acceso a los manuscritos del gran matemático fue también una fuente importante de sugerencias.

El panorama de la enseñanza en Göttingen que he trazado hasta aquí puede parecer decepcionante, pero no todas las materias estaban en ese estado. La enseñanza de la física tenía un aspecto muy distinto gracias a Wilhelm Weber, el famoso físico que fue expulsado de la universidad en 1837,[14] y que volvió de nuevo en 1849. Tras su vuelta, Weber organizó junto con otro físico y dos matemáticos un Seminario físico-matemático en el que participaría Dedekind, pero también, y muy activamente, Bernhard Riemann; éste fue sin duda el lugar donde se conocieron los dos matemáticos, que luego habrían de ser grandes amigos. Weber se ocupaba de las clases de 'física experimental', que ejercieron una gran impresión sobre Dedekind. De hecho, fue uno de los mayores impulsores de una nueva concepción de la física, que abrió el camino hacia la física teórica, y de un nuevo estilo educativo cuya marca distintiva era la formación práctica en el laboratorio, y cuyo

---

13 Dugac, ibid.

14 Como uno de los 'siete de Göttingen' que se opusieron a la concentración de poder realizada por el rey de Hannover, rehusando un nuevo juramento de lealtad al rey que vendría a reemplazar el anterior juramento a la constitución.

objetivo era lograr profesionales capaces de enfrentarse a los problemas de la investigación puntera del momento, con sólidos conocimientos tanto teóricos como prácticos. Lo que más interesó a Dedekind fueron los aspectos metodológicos del nuevo enfoque:

> [...] el gran curso de Weber, distribuido en dos semestres, me causó la más profunda impresión; la separación rigurosa entre los hechos fundamentales descubiertos gracias a las experiencias más simples y las hipótesis ligadas a ellos por el entendimiento humano, ofrecía un modelo insuperable de la verdadera investigación científica, como yo no había conocido nunca hasta entonces [...][15]

Weber fue siempre un importante apoyo académico para Dedekind. También para Riemann resultó una influencia clave: es notable ver cómo la metodología de Weber, en la descripción anterior, aparece claramente reflejada en la famosa lección de habilitación de Riemann sobre las hipótesis de la geometría, y de hecho puede considerarse la obra de Riemann como un desarrollo y una sofisticación del tipo de relaciones entre teoría matemática y física que presenta Weber. Pero a diferencia de lo que sucedió con Riemann, a quien dicha influencia inclinó hacia la física teórica, ni la admiración científica ni la amistad personal con ambos llevaron a Dedekind a ocuparse de problemas físicos, ni siquiera de las herramientas matemáticas de la física. Esto me parece un indicio más de su concentración en los problemas de fundamentos de la propia matemática.

Tras el doctorado, Dedekind se enfrenta al "gran esfuerzo" de completar algo su insuficiente formación: "No había cursos sobre la más nueva geometría [proyectiva?], sobre teoría de números superior, sobre ciclotomía y álgebra superior, sobre funciones elípticas, sobre física matemática, cosas todas ellas que estaban entonces brillantemente representadas en Berlin por Steiner, Jacobi, Dirichlet [...]".[16] Por este motivo se dedica a estudiar redacciones de cursos impartidos en Berlin y obras matemáticas de primer orden: las mecánicas de Laplace y Lagrange, la teoría del calor de Fourier, la teoría de funciones elípticas de Legendre, Jacobi y Abel, los tratados de geometría proyectiva de Steiner y Plücker, e incluso el cálculo baricéntrico de Möbius. En junio de 1854, pocas semanas después que Riemann, Dedekind se habilita pronuncian-

---

[15] Carta de Dedekind a Klein escrita el 26.04.1913, publicada por W. Lorey, *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts* (Leipzig/Berlin: Teubner, 1916), 81-83; cita en pag. 82.

do una lección que resulta interesante porque recoge el estado de sus ideas sobre fundamentos en la época; por este motivo hablaremos luego de ella. La habilitación le permite dar clases 'privadas' en la universidad, esto es, sin recibir un sueldo fijo, sino únicamente una parte del dinero de matriculación de los alumnos. De esta manera, Dedekind pasa a sufrir durante unos años la 'miseria del *Privatdozent*', agravada por el hecho de que a sus cursos sobre geometría proyectiva (1854/55) y álgebra superior (1856/57, 1857/58) sólo asisten dos estudiantes cada vez.

De todos modos, esta época de 'miseria', en la que se ve obligado a pedir todavía dinero a su familia, es la más importante en su formación como matemático debido a que se convierte en alumno de Dirichlet y de Riemann. En febrero de 1855 muere Gauss, el orgullo de la universidad de Göttingen, y ésta decide transformar su cátedra de astronomía en una de matemática con el fin de traer otro matemático de primer rango; su primer sucesor es Gustav Peter Lejeune-Dirichlet, que hasta entonces había dado clase en Berlin. La asistencia a las clases de Dirichlet y la relación personal con él, que seguirá un ritmo creciente, ejercen una influencia decisiva en la formación de Dedekind. Dirichlet había estudiado en Paris durante los años 20, conociendo y adoptando entonces las tendencias de Cauchy y Abel en análisis, pero perteneciendo ante todo al círculo de científicos que se reunían en torno a Joseph Fourier; al margen de esto, Gauss fue también para él una referencia clave. Fruto de su adhesión a esas tendencias fueron su obra sobre series de Fourier, que consiguió introducir un rigor 'moderno' (en el sentido de Abel y Cauchy) en el tratamiento de las mismas, abriendo el campo más fecundo para la teoría de funciones reales de los siguientes años; sus lecciones sobre teoría de números, que difundieron y ampliaron la obra de Gauss, entonces difícilmente comprensible para los matemáticos; y lo que se ha constituído en su contribución más reconocida al desarrollo de la matemática, la introducción de métodos analíticos en el tratamiento de problemas de teoría de números. Mencionemos también que Dirichlet trabajó mucho en temas de teoría de números algebraicos, que se convertirán en el campo de investigación fundamental de Dedekind. A todo esto unía una gran capacidad como profesor y un verdadero interés por sus alumnos, con lo que representó para la enseñanza de la matemática algo semejante a lo que Weber para la física. Dedekind escribiría posteriormente:

[16] ibid.

> Aunque ya había estudiado a conciencia los grandes tratados de Dirichlet, especialmente los de teoría de números, sin embargo fue para mí el mayor placer seguir sus conferencias enormemente penetrantes; en efecto, escuché una tras otra todas sus lecciones, sobre teoría de números, potencial, integral definida, ecuaciones diferenciales parciales, e hizo de mí, tanto por su enseñanza como por numerosas entrevistas personales en las que progresivamente aumentaba la confianza, un hombre nuevo.[17]

Con sus sólidos conocimientos de álgebra, teoría de números y análisis, y con su adhesión a las tendencias más rigurosas del momento (Gauss, Cauchy), Dirichlet representaba lo mejor de la matemática de la época, y la tendencia más rigurosa metodológicamente. El cuidado que se tomó en perfeccionar el conocimiento que Dedekind tenía de las distintas ramas de la matemática, la manera en que encauzó su trabajo, y su seguridad en cuestiones metodológicas, fueron sin duda los motivos por los que Dedekind lo consideró siempre su principal maestro y el hombre a quien más debía en su formación.

Junto con Weber y Dirichlet, Riemann completa el grupo de Göttingen del que dependió esencialmente la formación de Dedekind. Riemann, cinco años mayor que Dedekind, había estudiado en Göttingen y Berlin; de esa etapa en Berlin y de la preparación de su tesis doctoral provenía su amistad con Dirichlet, quien le consideraba como el mejor matemático joven de Alemania. Los trabajos de Riemann dieron claves fundamentales para el posterior desarrollo de la matemática; bastará mencionar su contribución a la teoría de funciones complejas, a la teoría de series trigonométricas, y a la geometría diferencial. Además, como ya he indicado, Riemann dedicó gran parte de sus esfuerzos, estimulado por Weber, a la física matemática, en especial a la búsqueda de una teoría unificada de los distintos fenómenos de calor, luz, magnetismo y electricidad.[18] Riemann había llegado a la universidad para estudiar teología, aunque finalmente consiguió el permiso paterno para orientarse a la matemática, si bien desde entonces le acompañó un gran interés por la filosofía. Sus trabajos son difíciles y contienen muchas veces pasos que sólo estaban justificados intuitivamente. Su obra matemática se orienta hacia planteamientos abstractos prefigurados por el propio Dirichlet, pero que Riemann lleva genialmente hacia delante. Las nuevas nociones abstractas que introdujo, como las 'superficies de Riemann' en

---

17 Carta a Klein, o.c., 82-83.

teoría de funciones complejas, y las 'variedades' de la geometría diferencial, constituyen el modelo al que Dedekind refirió siempre su introducción de nuevos conceptos algebraicos (cuerpo, anillo, módulo, ideal).

Al parecer, Dedekind asistió a todos los cursos impartidos por Riemann entre 1854 y 1858, en los que éste se ocupó de ecuaciones diferenciales parciales, de integral definida, y de funciones de variable compleja, especialmente funciones elípticas y abelianas. En noviembre de 1856, en un momento en que cree que no va a poder dar clase por falta de oyentes, escribe Dedekind:

> Pero no por eso va a pasar el invierno sin provecho para mí; veo mucho a Dirichlet, que siempre me da nuevas muestras de buena voluntad e interés, me da lecciones privadas grandes y pequeñas, y tiene siempre presente animarme a continuar la actividad, cosa que apenas es necesaria. [...] Además trato mucho a mi excelente colega Riemann, que sin duda es tras o incluso junto a Dirichlet el más profundo matemático vivo, y pronto será reconocido como tal, si su modestia le permite publicar algunas cosas que, ciertamente, de momento sólo serán comprensibles a unos pocos. La relación con ambos es inestimable y es de esperar que acabe trayendo sus frutos.[19]

Dedekind se encargó de saldar con creces la deuda contraída con sus maestros, y con esto indico otro rasgo de su actividad que fue resaltado y valorado una y otra vez por sus contemporáneos. Durante los años 60 sobre todo, se encarga de editar importantes escritos de los citados matemáticos: como he dicho, colabora con comentarios en

---

[18] En una nota manuscrita citada por Heinrich Weber y Dedekind en su edición de las obras de Riemann, éste afirma, tras referirse a sus trabajos sobre funciones trascendentes y sobre ecuaciones diferenciales parciales, que su "trabajo principal concierne a una nueva concepción de las conocidas leyes naturales –expresión de las mismas mediante otros conceptos fundamentales" (*Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass* (Leipzig: Teubner, 1876), 475). Esto da idea de la importancia de la física matemática en su pensamiento.

[19] W. Scharlau, *Richard Dedekind 1831/1981* (Braunschweig: Vieweg, 1981), 37. Es interesante advertir que en las cartas de esta época Dedekind ofrece una imagen de Riemann algo distinta de la que se ha transmitido, como un hombre con problemas psicológicos graves; cf. Scharlau, o.c.

la edición de las obras de Gauss, y de Dirichlet recibe el encargo póstumo de publicar un artículo sobre hidrodinámica (1861), y luego reelabora completamente las *Lecciones sobre teoría de números*, contribuyendo decisivamente a la difusión de los nuevos resultados.[20] En 1867 edita los dos trabajos de habilitación de Riemann, sobre series trigonométricas y sobre geometría diferencial, que tendrán un efecto inmediato en la investigación del momento, y dedica grandes esfuerzos a la edición de sus obras completas, que sólo gracias a la ayuda de H. Weber llegará a culminar. Con estos trabajos realizó un gran servicio a la comunidad matemática, pero quizá escaso servicio a sí mismo: las ofertas de plazas universitarias se retrasaron porque Dedekind no había publicado ninguna investigación original importante, y de hecho transcurren veinte años entre su doctorado y la aparición de la teoría de ideales (1871), su primer trabajo importante a la vez que su obra maestra.

Con lo anterior queda delineada la imagen del ambiente científico en el que Dedekind se encontró durante sus últimos años en Göttingen, un ambiente del que recibiría los estímulos más importantes para su obra posterior. En efecto, durante los años siguientes dio clase en los Politécnicos de Zürich y Braunschweig, lo que lo mantuvo alejado de los centros matemáticos importantes. Tras su etapa de Göttingen termina el contacto diario con otros investigadores o con estudiantes avanzados, lo que equivale a decir que terminan los estímulos para la investigación, cosa de la que Dedekind se resintió sin duda. A partir de los años 70, cuando su fama como teórico de números algebraicos estuvo ya asegurada, las visitas esporádicas de otros matemáticos y las interesantes correspondencias que sostuvo vinieron a paliar un poco esa situación de aislamiento que Dedekind eligió conscientemente. Entre sus corresponsales podemos destacar a Heinrich Weber, amigo íntimo, colaborador en la edición de las obras de Riemann y en un trabajo fundamental sobre teoría de funciones algebraicas de una variable, y autor de un manual de álgebra que contribuyó decisivamente a que los planteamientos de Dedekind se extendieran; Georg Frobenius, con quien sostuvo una importante correspondencia sobre álgebra, estimu-

---

[20] Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 4ª ed. (New York: Chelsea, 1968). Su reconocimiento ante Dirichlet fue tan grande que Dedekind hizo editar su obra maestra, la teoría de ideales, siempre como un suplemento a estas lecciones. También es digno de mención que durante los años 60 preparó una edición de las lecciones sobre potencial, que no llegó a editar (posiblemente debido a la muerte de Riemann, quien decidió que sus manuscritos pasaran a manos de Dedekind).

lándole en la concepción de la teoría de caracteres de grupos;[21] y Georg Cantor, con quien discutió problemas de teoría de conjuntos, como luego veremos. Así, aunque Dedekind fue un matemático sin discípulos, su influencia indirecta quedó asegurada a través de sus escritos y de esos contactos.

3. LA APARICIÓN DEL PLANTEAMIENTO CONJUNTISTA EN LAS INVESTIGACIONES ALGEBRAICAS DE DEDEKIND.

Ya he aludido al hecho de que las teorías que Dedekind propuso acerca de la fundamentación del sistema numérico se basan en la teoría de conjuntos; casi parece más correcto leer *¿Qué son y para qué sirven los números?* (1888) como un libro sobre teoría de conjuntos, que como un libro acerca de los números naturales. Pero la formación de un planteamiento conjuntista de la matemática es en su caso algo muy anterior a la aparición de cualquiera de estos escritos. El conocimiento de este hecho sería difícil si en los últimos años no se hubiera publicado una larga serie de manuscritos que han venido a dar una nueva imagen de la actividad de Dedekind en los años 'oscuros', desde mediados de los años 1850 a 1871. De todos modos, una indicación clara de ese hecho es que en 1871, un año antes de la aparición de *Continuidad y números irracionales*, Dedekind propuso un tratamiento conjuntista-estructural de la teoría de números algebraicos, indicando que ese planteamiento era también el correcto en álgebra.[22] Con esto se separaba radicalmente

---

[21] Cf. Th. Hawkins, 'New Light on Frobenius' Creation of the Theory of Group Characters', *Archive for History of Exact Sciences*, **12** (1974), 217-243.

[22] Un número real o complejo se denomina 'algebraico' cuando es la raíz de algún polinomio $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ con coeficientes a_i racionales (esto es, cuando satisface la ecuación $p(x)=0$). Los números reales que no son raíces de ningún polinomio, como por ejemplo π y e, se denominan 'trascendentes'. Además, se llama 'entero algebraico' a todo número que es raíz de un polinomio $p(x)$ con coeficientes a_i enteros. La teoría de números algebraicos se enfrentó al problema de que los enteros algebraicos no responden a la ley de factorización única en factores primos, que es típica de los números naturales o enteros y constituye el fundamento de la teoría de números, conocido ya por los griegos. Para restablecer esa ley se recurrió a la introducción de 'factores ideales', siguiendo una idea de Kummer. Dedekind y Kronecker fueron los primeros en obtener una teoría satisfactoria de la factorización en cualquier conjunto de enteros algebraicos.

de la práctica establecida en su tiempo, e introducía un giro que puede denominarse revolucionario. En estas investigaciones, los conjuntos se convirtían ya en los objetos centrales de la teoría, y aparecían las diversas relaciones y operaciones que Dedekind presentó en su libro de 1888 desde el punto de vista de la teoría de conjuntos abstracta.

Gracias a nuestro buen conocimiento de los manuscritos, es posible seguir el desarrollo del planteamiento conjuntista en la obra algebraica de Dedekind. Con esto se llega a un resultado sorprendente: el enfoque conjuntista estaba ya básicamente claro a finales de los años 1850, de modo que puede decirse que el desarrollo de ese planteamiento fue obra de toda una vida.

En una carta de 1856 dirigida a Kummer, Dirichlet mencionaba que "Dedekind [..] se ha enfrascado totalmente en Galois y Abel, y por tanto camina en las huellas de nuestro amigo Kronecker."[23] Resultado de estas investigaciones fueron los cursos impartidos por Dedekind en los semestres de invierno de 1856/57 y 1857/58, que tenían por objeto los siguientes temas: álgebra superior, ciclotomía[24] y teoría de Galois. La parte más notable de estas lecciones es sin duda la dedicada a la teoría de Galois, obra genial del trágicamente desaparecido Evariste Galois, que permitía analizar desde un punto de vista muy superior el antiguo problema de la resolución de ecuaciones algebraicas mediante radicales. Se trataba de la primera vez que esta teoría era objeto de un curso universitario, pero lo más notable es que Dedekind analizaba independientemente los fundamentos de teoría de grupos necesarios para la misma, concibiendo la teoría de grupos en sentido abstracto. Además, veía ya con certeza la importancia de tener en cuenta en cada momento la referencia a un cuerpo base; la interrelación entre cuerpos y grupos, que constituye el núcleo de la teoría de Galois desde un punto de vista moderno, quedaba expuesta claramente en dichas lecciones.

---

23 K.-R. Biermann, 'Zu Dirichlets geplantem Nachruf auf Gauss', *NTM-Schriften* **8** (1971), 9-12; cita en p. 12.

24 En ciclotomía, o teoría de la 'división del círculo', se estudian las soluciones complejas de ecuaciones de la forma $x^n = 1$; si n = 3, esas soluciones nos dan los puntos del plano complejo que dividen al círculo de radio unidad en 3 partes, y así sucesivamente, de donde viene el nombre. Semejantes números complejos engendran los llamados cuerpos ciclotómicos. De esta tema, estudiado ya por Gauss, vinieron los principales estímulos para la teoría de números algebraicos, y en particular para las investigaciones de Kummer.

Especialmente interesante es que Dedekind presentara un planteamiento abstracto de la noción de grupo; para entender lo que esto quiere decir, vale la pena citar un fragmento de lo que probablemente constituye parte del texto del curso 1857/58. Tras demostrar dos teoremas para el producto de sustituciones,

I. $(\theta\theta')\theta'' = \theta(\theta'\theta'')$ y
II. De dos cualesquiera de las ecuaciones $\phi=\theta$, $\phi'=\theta'$, $\phi\phi'=\theta\theta'$, se sigue la tercera,

Dedekind escribe lo siguiente:

> Las investigaciones que siguen a continuación se basan exclusivamente en los dos teoremas fundamentales que hemos demostrado, y en el hecho de que el número de sustituciones es finito: por tanto, los resultados de las mismas valdrán exactamente igual para un *dominio* de número finito de *elementos, cosas, conceptos* θ, θ', θ''..., que admitan a partir de θ, θ' una composición $\theta\theta'$ *definida del modo que sea*, de tal manera que $\theta\theta'$ sea de nuevo un miembro de dicho dominio, y que ese tipo de composición obedezca las leyes que se expresan en ambos teoremas fundamentales. En muchas partes de la matemática, pero especialmente en la teoría de números y el álgebra, se encuentran continuamente ejemplos de esta teoría; los mismos métodos de demostración valen aquí como allí.[25]

Luego introduce la noción de subgrupo normal, considera la partición del grupo por un subgrupo normal, demuestra que la ley de composición inducida en la partición satisface las condiciones I. y II., y escribe:

> Una vez que hemos probado esta coincidencia con las condiciones fundamentales, se sigue también (cf. el final del art. 2 [el texto que acabamos de citar]) que todos los resultados anteriores pueden ser transferidos mutatis

---

25 R. Dedekind, 'Eine Vorlesung über Algebra', en W. Scharlau, o.c., 59-100; la cita es de la p. 63 (subrayado nuestro). Sobre este tema cf. Scharlau, 'Erläuterungen zu Dedekinds Manuskript über Algebra', pags. 101-108 del mismo libro; y W. Purkert, 'Ein Manuskript Dedekinds über Galois-Theorie', *NTM-Schriften*, **13** (1977) 2, 1-16.

> mutandis a nuestro dominio finito de los *h* complejos K, K_1, ..., K_{h-1}; también aquí podremos hablar otra vez de potencias y de grupos de estos complejos, y encontrar las mismas leyes que arriba.[26]

El hecho de que Dedekind ofrezca semejante visión ya en los años 1850 resulta casi desconcertante, ya que la comunidad matemática sólo se enfrentará a una visión abstracta de los grupos unos treinta años después. Como veremos, ese hecho parece tener que ver con la posición filosófica y metodológica de Dedekind frente a la matemática, que le condujo al logicismo.

Como ya he dicho, otro aspecto fundamental del trabajo es que Dedekind se da cuenta de que la noción de cuerpo es esencial para la teoría de Galois. Como escribe Scharlau,

> Su objetivo fundamental era dar a la teoría de Galois el necesario fundamento de teoría de cuerpos, de modo que las cuestiones de teoría de cuerpos se sitúan en el primer plano de sus investigaciones, y las cuestiones propiamente de teoría de Galois (p.e. criterios de solubilidad) pasan claramente a segundo término. Como dato más importante para la historiografía de la matemática del siglo XIX merece la pena destacar que, contra las opiniones hasta ahora habituales, Dedekind profundizó en la fundamentación de la teoría de cuerpos antes y sobre todo independientemente de la teoría de números algebraicos.[27]

De hecho, el haberse familiarizado con la noción de cuerpo gracias a la teoría de Galois le permitió luego conseguir importantes avances en teoría de números algebraicos. El más importante fue quizá lograr una idea satisfactoria de cómo debe concebirse y definirse el anillo de enteros de un cuerpo de números algebraicos; pero no podemos desarrollar aquí este tema.[28]

---

26 o.c., 68.

27 W. Scharlau, 'Unveröffentliche algebraische Arbeiten Richard Dedekinds aus seiner Göttinger Zeit 1855-1858', *Archive for History of Exact Sciences*, **27** (1982), 336.

28 La manera formal en que Kummer, Dirichlet, Eisenstein, etc. definían ese concepto era errónea, y hacía imposible una teoría general de la factorización. Cf. el magnífico trabajo de H. Edwards, 'The Genesis of Ideal Theory', *Archive for History of Exact Sciences* **23** (1980), 321-378, y también su 'Dedekind's Invention of Ideals', *Bulletin of the London Mathematical Society* **15** (1983) 1, 8-17.

Las nociones de 'dominio' y 'complejo', que Dedekind emplea con precisión técnica, responden a consideraciones conjuntistas: Dedekind considera en esta época conjuntos de sustituciones, de números algebraicos, o como veremos enseguida de polinomios, como objetos matemáticos de pleno derecho, aunque por supuesto no puede hablarse aquí de una teoría de conjuntos. El hecho de que Dedekind trabaje con particiones de grupos, leyes de composición inducidas sobre las clases, etc. supone que considera los conjuntos como objetos sometidos a operaciones matemáticas análogas a las tradicionales, con lo que se aproxima al planteamiento estructural y abstracto típico del álgebra de nuestro siglo.

Esta impresión queda reforzada por otro trabajo de la misma época, el 'Esbozo de una teoría de las congruencias superiores respecto a un módulo real primo', escrito en 1856 y publicado al año siguiente. Creo que no es necesario conocer el auténtico contenido del escrito para darse cuenta de la importancia de declaraciones como la siguiente para la formación de una mentalidad conjuntista:

> Los teoremas precedentes corresponden exactamente a los de divisibilidad de números, en el sentido de que todo el sistema de las infinitas funciones de una variable congruentes entre sí módulo *p* se comporta aquí como un solo número concreto en teoría de números, pues cada función de tal sistema sustituye completamente a cualquier otra del mismo en cualquier respecto; una función tal es el representante de toda la clase; cada clase tiene un grado determinado, unos ciertos divisores, etc., y todas estas características corresponden de igual modo a cada miembro particular de la clase. El sistema de las infinitas clases incongruentes –infinitas, pues el grado puede crecer ilimitadamente– corresponde a la serie de los números enteros en teoría de números. A la congruencia de números corresponde aquí la congruencia de clases de funciones respecto a un módulo doble, [...][29]

Lo importante de este texto es que en él vemos cómo Dedekind maneja clases de equivalencia como objetos sometidos a operaciones análogas a las de la aritmética ordinaria. Más aún, Dedekind resalta el

[29] 'Abriss einer Theorie der höheren Kongruenzen in Bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus', *Gesammelte mathematische Werke* (New York: Chelsea, 1969), vol. I, 47.

hecho de cada una de esas clases contiene infinitos elementos, con lo que deja claro que no tiene ningún reparo 'filosófico' que hacer a la aparición del infinito actual en matemática. La modernidad de estas ideas es sorprendente, y creo que con lo dicho resulta indudable que Dedekind estaba ya en el camino del conjuntismo mucho antes de lo que habitualmente se opina.

Todas las operaciones conjuntistas que Dedekind introduce en su libro de 1888 habían aparecido ya en su obra algebraica, si bien no expuestas de modo abstracto, sino naturalmente sometidas a la restricción de que la estructura algebraica se conserve. Así, vemos aparecer continuamente subgrupos, subcuerpos, subideales, etc., es decir, la relación de inclusión; así como grupos, cuerpos, etc. engendrados por la unión de dos grupos, cuerpos, etc.; y el hecho de que la intersección de dos grupos, etc. es de nuevo un grupo, etc. Y en efecto, en *¿Qué son y para qué sirven los números?* aparecen sólo la relación de inclusión y las operaciones de unión e intersección, echándose en falta especialmente operaciones más fuertes que Cantor empleará, como el producto cartesiano.

Pero, valga la paradoja, la teoría conjuntista de Dedekind no es sólo una teoría de conjuntos. La introducción al libro de 1888 ni siquiera menciona la noción de conjunto: todas las tintas se cargan en la noción de aplicación, que de hecho constituye uno de los rasgos más claramente diferenciadores de la teoría de Dedekind frente a la de Cantor, y el pilar sobre el que se construye toda la teoría del libro. Que no mencione los conjuntos resulta comprensible, ya que trabajaba con ellos desde 30 años antes, y dado que Cantor había hecho ya suficiente por conseguirles 'carta de ciudadanía matemática' durante los años 1874-84. Pero ¿qué puede decirse de la historia de la noción de aplicación en la matemática de Dedekind? Ni más ni menos que es aproximadamente coetánea de la de conjunto.

Juzgue el lector por sí mismo; el manuscrito sobre teoría de Galois publicado por Scharlau comienza así:

> **Artículo 1**
> *Definición.* Por *sustitución* se entiende en general todo proceso mediante el cual ciertos elementos *a,b,c...* se transforman en otros *a',b',c'...*, o son reemplazados por éstos; en lo que sigue consideramos sólo las sustituciones en las que el complejo de los elementos reemplazantes *a',b',c'* es idéntico al de los reemplazados *a,b,c.*[30]

[30] o.c., 60.

La terminología puede resultar aquí confundente. Hoy entendemos 'sustitución' justamente en el sentido restringido que señala Dedekind, y no en el general de su definición; asociamos esa idea a la de permutación, con lo que se pierde totalmente de vista el modo en que Dedekind la está planteando. Si queremos buscar una palabra actual que se corresponda a esa noción general, no nos queda más remedio que utilizar 'aplicación'.[31] Esto queda plenamente confirmado por otro texto de Dedekind escrito unos 20 años después, sin ninguna intención de establecer la antigüedad de su noción de aplicación. El texto es interesante además porque da pie al primer anuncio público de *¿Qué son y para qué sirven los números?*, y dice así:

> Sucede muy frecuentemente en la matemática y en otras ciencias que, cuando se encuentra un sistema Ω de cosas o elementos ω, cada elemento determinado ω es reemplazado por un determinado elemento ω' que se le hace corresponder de acuerdo con una cierta ley; se acostumbra a denominar un acto semejante sustitución, y se dice que mediante esta sustitución el elemento ω se transforma en el elemento ω', e igualmente el sistema Ω se transforma en el sistema Ω' de los elementos ω'. La terminología resulta algo más cómoda si, como queremos hacer nosotros, se concibe esta sustitución como una aplicación del sistema Ω, y de acuerdo con ello se llama a ω' la imagen de ω, e igualmente a Ω' la imagen de Ω. [Nota:] Sobre esta facultad mental de comparar una cosa ω con una cosa ω', o relacionar ω con ω', o hacer corresponder a ω ω', sin la cual no es posible en absoluto pensar, descansa también, como intentaré demostrar en otro lugar, la ciencia entera de los números.[32]

---

[31] De hecho, Dedekind se tomó las mismas libertades con la palabra 'permutación' que con 'sustitución': en la 3ª y 4ª edición (1879 y 1894 respectivamente) de las *Vorlesungen über Zahlentheorie* llama permutación a toda aplicación de un cuerpo que conserva su estructura (4ª ed., o.c., 457).

[32] *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 3ª ed. (Braunschweig: Vieweg, 1879), 470. Digamos de paso que la terminología sólo se hace más cómodo en alemán, donde 'aplicación' se dice 'Abbildung', que viene a significar algo parecido a 'representación', en el sentido en que un cuadro puede representar a un objeto. Nuestro uso lingüístico sigue aquí al francés, lo que no es la mejor elección. Por este motivo y por la conexión entre el término y la filosofía de la matemática de Dedekind, nuestra traducción empleará sistemáticamente la palabra 'representación'.

Como última corroboración de este hecho, vale la pena mencionar que en un fragmento titulado 'De los estudios de grupos', datado por el propio Dedekind en los años 1855-58, aparece un apartado sobre *Equivalencia de grupos*. En él Dedekind considera una aplicación entre los objetos de un grupo *M* y los de un complejo (conjunto) *M'*, tal que a cada producto de elementos de *M* corresponda el producto de sus imágenes. Demuestra que *M'* es un grupo, y por lo que sigue queda claro que está considerando la posibilidad de que la aplicación sea no sólo un isomorfismo, sino quizá un homomorfismo: introduce la noción del núcleo *N* del homomorfismo, y muestra cómo la partición *M/N* da lugar a un isomorfismo –o, como dice Dedekind, una 'equivalencia'– entre el grupo cociente *M/N* y la imagen *M'*. Todo esto confirma el hecho de que ya a finales de los años 1850, Dedekind conoce la noción de aplicación, para la que utiliza el término 'sustitución', noción que no está restringida a biyecciones y ni siquiera a inyecciones (porque un homomorfismo es una aplicación no inyectiva). En sus estudios algebraicos, como es natural, Dedekind analiza sólo morfismos, aplicaciones que preservan estructuras.

Todas esas nociones conjuntistas aparecen de modo especialmente claro en la primera versión de la teoría de ideales, presentada en la 2ª edición de las *Lecciones sobre teoría de números* (1871). Nada más empezar, el párrafo donde se introduce la noción de cuerpo basta –salvado el problema de la diferente terminología– para atestiguar la claridad con que Dedekind maneja las operaciones conjuntistas y las aplicaciones.[33] Pero de hecho la teoría de conjuntos tiene un papel mucho más esencial en la teoría de ideales: la versión dada por Dedekind al problema de la factorización ideal se aleja del enfoque habitual en aquel momento, en términos de números, para plantear todo el asunto en términos de conjuntos. Un 'ideal' es para Dedekind un conjunto de números algebraicos que tiene determinadas propiedades, y de lo que se trata es de definir una 'multiplicación' de ideales y probar que todo ideal es descomponible de manera única en un 'producto' de 'ideales primos'. Una vez más, tenemos que abandonar este tema, cuya complejidad es excesiva para tratarlo aquí.[34]

---

[33] Cf. *Werke*, vol. III, 224; en el tercer vólumen de *Werke* se recogen las partes más interesantes de la 2ª y 3ª edición (primera y segunda versiones de la teoría de ideales) que son diferentes de la versión definitiva.

[34] El lector interesado en profundizar sobre los temas de esta sección puede consultar mi artículo 'Tradicional Logic and the Early History of Sets, 1854-1908', *Archive for History of Exact Sciences* **50** (1996), 5-71, así como las referencias incluidas en la bibliografía comentada.

4. LA CONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA NUMÉRICO.[35]

Al tiempo que comenzaba sus investigaciones algebraicas, Dedekind seguía cultivando su interés por la aritmética, surgido ya con la lectura de las *Disquisitiones* de Gauss a finales de los años 1840. Entre los años 1855 y 1858 asistió a las lecciones de Dirichlet sobre ese tema, base del material que le sirvió luego para redactar las *Lecciones sobre teoría de números*. A la vez, su interés por las cuestiones de fundamentación le llevaba a plantearse el problema de encontrar un desarrollo riguroso de toda la aritmética, desde los números naturales a los complejos.

Este problema surge ya en su lección de habilitación, leída en junio de 1854 y por tanto antes de la presencia de Dirichlet en Göttingen. En esta lección, titulada 'Sobre la introducción de nuevas funciones en la matemática', expondrá algunas ideas a las que continuaría adhiriéndose toda la vida. El tema general es una reflexión sobre el desarrollo histórico de la matemática y sobre la manera en que la introducción de nuevas nociones ha permitido avanzar a esa ciencia. Dedekind defiende la idea de que el progreso de la matemática depende de la *creación* de nuevos objetos y nuevas nociones, pese a lo cual las extensiones de las definiciones matemáticas tienen la peculiaridad de que

> no dejan lugar al arbitrio, sino que se siguen con necesidad absoluta de las [definiciones] previamente limitadas cuando se les aplica el principio fundamental de que las leyes que resultan de las definiciones iniciales y son características de los conceptos determinados por ellas deben considerarse *válidas en general*.[36]

De este modo, el énfasis en que los objetos y los conceptos de la matemática son creaciones humanas, que siempre fue característico de su punto de vista, se liga ya con la exigencia de rigor total. Esto se aplica

---

[35] Es importante señalar que hablamos aquí de 'construcción' en el sentido de Dedekind, que no tiene nada que ver con las ideas del intuicionismo o el constructivismo actuales. Nos referimos a la definición de nuevos objetos matemáticos mediante conjuntos de objetos previos (pares ordenados, clases de equivalencia, cortaduras). Para ello es esencial admitir procedimientos que son 'no constructivos' en el sentido actual: la idea de 'construcción' empleada por Dedekind no implica ninguna restricción sobre los procedimientos admisibles en matemática, antes al contrario, ya que supone el empleo de conjuntos infinitos. Por ello, para evitar confusiones, no utilizaremos el adjetivo 'constructivo'.

[36] 'Über die Einführung neuer Functionen in der Mathematik', *Werke*, vol. III, 428-438; la cita es de la pag. 430.

en particular a la extensión de las operaciones aritméticas a nuevos tipos de números, y a propósito de este tema Dedekind nos ofrece un resumen de su concepción del desarrollo riguroso de la aritmética:

> La aritmética elemental surge de la construcción de los números ordinales y cardinales; el paso sucesivo de un término de la serie de los números enteros absolutos al inmediatamente siguiente es la primera y más sencilla operación de la aritmética; sobre ella se fundan todas las demás. Si se reúnen varias realizaciones de esa operación elemental en un único acto, se alcanza el concepto de adición. Partiendo de éste se construye de forma similar el de multiplicación, y a partir de éste el de potenciación. Pero las definiciones así obtenidas de esas operaciones fundamentales no bastan al desarrollo posterior de la aritmética, porque los números con los que nos permiten operar están limitados a un dominio muy pequeño. El desarrollo de la aritmética, o sea, regenerar cada vez mediante cada una de esas operaciones todo el dominio numérico disponible, o con otras palabras: el logro de la posibilidad de ejecutar ilimitadamente las operaciones indirectas o inversas –sustracción, división, etc.–, conduce a la necesidad de crear nuevas clases de números porque la serie original de los números enteros absolutos no puede en absoluto satisfacer esa exigencia. Así se obtienen los números negativos, quebrados, irracionales, y finalmente también los llamados números imaginarios. Una vez que el dominio numérico se ha ampliado de esa manera, se hace necesario definir de nuevo las operaciones, cuyo efecto sólo había sido determinado hasta aquí para la serie de los enteros absolutos, de modo que puedan ser aplicadas también a los números recien creados. Y estas extensiones de las definiciones no resultan arbitrarias tan pronto como se sigue el principio general antes expuesto, o sea, declarar válidas en general las leyes a las que se ajustaban las operaciones en su acepción limitada y a partir de ahí, inversamente, derivar el significado de las operaciones para los nuevos dominios numéricos.[37]

[37] ibid. 430-431.

El tema central es aquí la extensión rigurosa de las operaciones, mientras que la 'creación' de nuevos números no parece plantear ningún problema; los escritos posteriores invierten este orden, de manera que la construcción de los números pasa a ser el centro de las consideraciones. La ausencia de planteamientos de construcción en la lección de habilitación coincide con la ausencia de cualquier mención de la idea de conjunto. Esto llama mucho la atención teniendo en cuenta que dos años después comienza el uso sistemático de esa noción en las investigaciones algebraicas de Dedekind.

En la lección de habilitación, Dedekind parece considerar la introducción de los irracionales y de los complejos como algo esencialmente problemático:

> [...] nos vemos así forzados a crear los números irracionales, con los que aparece igualmente la noción de límite, y finalmente los números imaginarios. Estos progresos son tan inmensos que es difícil decidir cuál de los distintos caminos que se abren aquí se debe seguir. [...] Como se sabe, hasta el momento no existe, o al menos todavía no se ha publicado, ninguna teoría irreprochable de los números imaginarios, por no hablar de los números recientemente ideados por Hamilton.[38]

El comentario sobre los números imaginarios me parece muy interesante porque Dedekind no volverá nunca al tema ni escribirá una línea sobre la fundamentación de dichos números. Ahora bien, a finales de 1857 Dedekind lee por vez primera las *Lectures on Quaternions* (Dublin, 1853) de Hamilton, y en el prefacio de esta obra se encuentra con la definición de los complejos por construcción mediante pares de números reales. Sin duda, este enfoque le pareció totalmente satisfactorio y dirigió sus pasos hacia la construcción de los demás tipos de números; de ahí que nunca necesitara volver al tema de los complejos, resuelto por Hamilton.

Sir William Rowan Hamilton fue el matemático británico más notable en la primera mitad del XIX. Aparte de desarrollar una carrera fulgurante, realizó importantes contribuciones a la mecánica y a la óptica, y desarrolló el primer ejemplo de cuerpo no conmutativo (los cuaterniones), realizando con ello el ideal perseguido por muchos matemáticos de

---

[38] ibid. 434. Dedekind se refiere obviamente a los cuaterniones.

encontrar un análogo a los complejos susceptible de interpretación geométrica en el espacio. Asimismo, Hamilton se preocupó por la fundamentación del álgebra, que para él abarcaba la aritmética y el análisis, equivaliendo así a lo que Dedekind llamaba 'aritmética'. En este sentido, en 1837 publicó su famoso artículo 'Teoría de Funciones Conjugadas, o Pares Algebraicos; con un Ensayo preliminar y elemental sobre el Álgebra como Ciencia del Tiempo Puro'. El contenido de este ensayo se resume en el prefacio antes citado, que probablemente fue la única fuente por la que Dedekind conoció estas ideas.

Hamilton, fuertemente influído por concepciones especulativas y por la filosofía de Kant, proponía la intuición del tiempo como fuente del álgebra, de forma análoga a como la intuición del espacio se consideraba fuente de la geometría. Detrás de esta extraña propuesta estaba la convicción de que el álgebra estudia a fin de cuentas el orden de una progresión continua y unidimensional (el orden de los números reales), cosa que puede parecer algo más sensata. De hecho, Hamilton tuvo ideas modernas e interesantes, y sólo su afición por dar versiones especulativas y casi metafísicas de esas ideas hace que nos resulten extrañas; su ensayo es una contribución de primer rango a la rigorización de la teoría de los números reales. En cualquier caso, está claro que Dedekind no se sintió convencido por la propuesta de basar la noción de número real en la intuición temporal, por lo que no entraremos en detalles al respecto. Al comienzo del primer prólogo a *¿Qué son y para qué sirven los números?* se encuentra un texto con una crítica clara, aunque implícita, al enfoque de Hamilton. El caso es que Hamilton proseguía presentando la teoría de los complejos como pares:

> [...] pensé que sin salir de la misma *clase general* de interpretaciones, y especialmente sin dejar de referirlo todo a la noción de *tiempo*, expuesta y mantenida como antes, podríamos concebir y comparar *pares de momentos*; y de este modo derivar una concepción de *pares de pasos* (en el tiempo) sobre la cual se podría fundar una teoría de *pares de números*, en la que no se plantearían tales dificultades [inexistencia de raices cuadradas de números negativos].[39]

---

[39] Hamilton, *The mathematical Papers*, vol. 3 (Cambridge: University Press, 1967), 121. La teoría de números reales procedía considerando primero 'momentos' temporales, luego 'pasos' o 'transiciones' de un momento cualquiera a otro, y definía finalmente los números como razones entre pasos temporales; vemos que a fin de cuentas se trataba de una nueva versión de la definición tradicional del número como proporción. En el texto citado, Hamilton propone el mismo proceso para los pares. Quizá vale la pena

Por este camino, y simplificando, Hamilton reemplazaba los números $a+bi$ (donde la dificultad reside en interpretar el significado de i) por pares de números (a,b) donde a y b son números reales. Los números reales habituales quedaban definidos como pares de la forma $(a,0)$, y dos pares eran iguales, $(a,b)=(c,d)$, si y sólo si $a=c$, $b=d$. Las operaciones sobre pares podían definirse convenientemente por medio de las operaciones sobre números reales:

$$(a,b)+(c,d) = (a+c,b+d),$$
$$(a,b)(c,d) = (ac-bd,bc+ad).$$

De esta manera, la misteriosa unidad imaginaria podía definirse como $i=(0,1)$, ya que según la definición del producto $(0,1)^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$. Todas las operaciones, tanto directas como inversas, daban como resultado un par.

Era fácil ver que el mismo método podía aplicarse para construir los números enteros sobre la base de los naturales, y los racionales sobre la base de los enteros. Así, entre los manuscritos de Dedekind encontramos tres páginas que se ocupan brevemente de este tema, y que podrían incluso proceder de finales de los años 1850.[40] Si a, b designan ahora números naturales, podemos definir los enteros como pares (a,b) tales que $(a,b) = (a',b')$ si y sólo si $a+b' = b+a'$; la definición de la suma es como antes, y la sustracción arroja siempre como resultado un par de números naturales. En el manuscrito, Dedekind demuestra la transitividad de la relación de equivalencia (igualdad) de pares, demuestra que la suma arroja un resultado único (salvo equivalencia), e indica los teoremas de conmutatividad y asociatividad. Luego define la sustracción, demuestra su unicidad salvo equivalencia, y pasa a definir el cero y los numeros negativos probando los teoremas necesarios para justificar esas definiciones. Luego se ocupa de los racionales: si a y b designan enteros, definimos los racionales como pares (a,b) tales que $(a,b) = (a',b')$ si y sólo si $ab' = ba'$; el resto se desarrollaría de forma análoga al caso de los enteros.

---

indicar que por mucho que los momentos temporales y sus relaciones puedan considerarse intuitivos, la introducción de pasos, razones y pares se sale de ese marco y entra en un terreno abstracto. Es razonable pensar que Dedekind fue consciente de este problema, y buscó para la teoría de pares es decir, para el método constructivo un fundamento más apropiado: la teoría de conjuntos, que él consideraba parte de la lógica.

40 Los manuscritos se encuentra en el *Handschriftenabteilung* de la *Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek* de Göttingen. El mencionado aquí lleva la referencia Cod. Ms. Dedekind, III.2.

En esa introducción de los enteros y racionales mediante pares hay sin embargo un detalle que resultaba insatisfactorio para Dedekind: mientras que a cada número imaginario le corresponde un y sólo un par de números reales, a cada entero le corresponden infinitos pares de números naturales, y lo análogo sucede con los racionales. Por este motivo, Dedekind se ve impulsado a complicar la teoría: los enteros no se definirán simplemente como pares, sino como clases de equivalencia de pares de números naturales, y análogamente se definirán los racionales. Este modo de desarrollar la cuestión es el que encontramos en el manuscrito que traduzco, titulado 'La extensión del concepto de número sobre la base de la serie de los números naturales', que es sin duda obra de los años 1890, y que pese a su título no llega ni siquiera a completar la teoría de los enteros.

En resumidas cuentas, todo indica que Dedekind hizo suyo el método de Hamilton, encontrando su auténtica base en el desarrollo de las ideas conjuntistas que estaba empleando en su obra algebraica. En conexión con estas ideas, Dedekind pudo también extender a todos los casos y perfeccionar el método de construcción. Pero si la introducción de los enteros y los racionales parecía una extensión bastante simple del método tal como lo empleaba Hamilton, no sucedía lo mismo con los números irracionales. Como veremos en seguida, la cuestión le ocupó intensamente durante el año 1858, según sus propias dataciones que resultan coherentes con toda la reconstrucción que estamos viendo, y en particular con el desarrollo de sus ideas algebraicas.

La complejidad de la introducción de los irracionales puede explicarse teniendo en cuenta que aquí no nos enfrentamos con una compleción algebraica (introducción de números que aseguren la realización de cierta operación) sino más bien con una compleción topológica. Se dice que un conjunto es *denso* si está ordenado de tal manera que entre dos elementos cualesquiera del mismo existe otro. El punto clave respecto a los números reales estriba en el reconocimiento de que el conjunto de los números racionales es denso pero no continuo, y el problema es completarlo de modo que obtengamos un conjunto continuo. El propio Dedekind enfatizará una y otra vez que la cuestión clave es la de la continuidad, que presupone una definición satisfactoria de esa propiedad. La definición de un conjunto continuo sobre la base del conjunto de los racionales exige además que no empleemos pares sino cortaduras, esto es, conjuntos infinitos.

Vale la pena mencionar aquí que el propio Hamilton pasaba enseguida de los pares a las triplas, y por este camino a las cuádruplas -cuaterniones-, sugiriendo incluso la conveniencia de una teoría general de los 'systems or sets', aunque hay que tener en cuenta que los 'sets'

[conjuntos] de Hamilton no son conjuntos en el sentido de Dedekind, que es el actual, sino conjuntos ordenados de *n* elementos, para un *n* finito cualquiera.[41] Pero en todo caso el paso a conjuntos infinitos no estaba tan lejos, sobre todo en el caso de Dedekind, que en la misma época estaba considerando cuerpos -conjuntos de infinitos números-, clases infinitas de funciones, etc., sin ningún tipo de escrúpulo filosófico.

Pese a haber sido concebida ya hacia 1858, Dedekind no decidió publicar su construcción de los irracionales por medio de cortaduras hasta 14 años más tarde, porque, como puede leerse en las cartas a Lipschitz, consideraba que esa teoría no tenía un valor especial.

5. CONTINUIDAD Y NÚMEROS IRRACIONALES.

En 1872 tuvo lugar la publicación de las construcciones de los números reales propuestas por los matemáticos alemanes Weierstrass, Cantor y Dedekind. El artículo de Dedekind resalta por su claridad metodológica y expositiva, que lo ha convertido en un clásico de la literatura matemática. Su teoría es además la más sistemáticamente conjuntista de las tres, cosa que resultará natural teniendo en cuenta los apartados anteriores. Por otro lado, la teoría de Cantor es la que está más cerca de la de Dedekind, y en otros puntos de su artículo avanzaba claramente, de manera independiente, hacia la formulación de nociones conjuntistas; éste fue seguramente el motivo por el que produjo una gran impresión en nuestro autor. El tomar como base el dominio de los números racionales con su aritmética, la construcción de los reales por medio de ciertos objetos compuestos de infinitos elementos, la comparación de la geometría con la aritmética, la afirmación de que la continuidad del espacio es indemostrable y ha de ser postulada; todos éstos son puntos de estrecho contacto entre ambas exposiciones.

5.1. Como acabo de decir, el objeto de las teorías de Dedekind, Weierstrass y Cantor era obtener una definición rigurosa y general de los números irracionales por construcción, empleando únicamente los números racionales y sus operaciones. La convicción más o menos vaga de que algo de este tipo era posible venía de bastante atrás; Dedekind

---

41 Cf. 'Preface to Lectures on Quaternions', 126 y 132.

dice que es "evidente, y nada nuevo, que todo teorema del álgebra y del análisis superior, por alejado que esté, puede expresarse como un teorema sobre números naturales, afirmación que también he oído repetidas veces en boca de Dirichlet." Esto muestra que Dedekind discutió con Dirichlet los problemas de fundamentación que tanto le interesaban, y que Dirichlet puede considerarse predecesor del tipo de enfoque que comentamos. Otro predecesor importante en Alemania fue Martin Ohm, hermano del físico y profesor en la universidad de Berlín. De este modo, el ideal de la reducción de los irracionales a los racionales estaba ampliamente difundido, cosa que explica la concordancia de Weierstrass, Cantor y Dedekind en este punto. De todos modos, el método mediante el cual había de realizarse la reducción no estaba claro, y no nos queda más remedio que considerar las afirmaciones de Dirichlet como algo vago. Como además se pensaba que los números racionales eran facilmente definibles sobre la base de los naturales, la construcción de los irracionales, único paso problemático, venía a resolver de un golpe el problema de la aritmética.

La teoría de Cantor ha sido considerada a menudo como una reformulación de la de Weierstrass. La figura de Karl Weierstrass es bien conocida; desde su cátedra de Berlín impulsó un nuevo nivel de rigor en análisis: introdujo la noción de convergencia uniforme, mostró la no equivalencia de continuidad y diferenciabilidad (presentando un famoso ejemplo de función continua y no diferenciable en ningún punto), y en general debemos a él y sus alumnos la mayor parte de la actual fundamentación rigurosa del análisis.[42] Es llamativo el hecho de que Weierstrass denominara a los números reales 'magnitudes numéricas', cosa que nos devuelve a los temas discutidos en el apartado 1; de todas formas, trató de introducir rigor en el tratamiento de dichas 'magnitudes' por un camino muy diferente al de la teoría de proporciones.

---

[42] Vale la pena indicar también otra cuestión. En sus trabajos sobre series de Fourier, Dirichlet había propuesto la definición abstracta de una función como cualquier ley que a un argumento dado le asigna un valor bien determinado. Weierstrass, que mostró siempre inclinación por los enfoques constructivos, criticó esa definición abstracta como algo demasiado vago; frente a ello impulsó el estudio de las funciones analíticas, y en este terreno parece haber considerado siempre que las series de potencias dan la herramienta clave para la fundamentación (lo que parece retrotraernos a Lagrange y Ohm). Por este motivo resulta natural que su teoría de los irracionales se basara en el empleo de series. El constructivismo débil de Weierstrass le acerca a las posiciones de su colega y amigo Leopold Kronecker, quien sin embargo fue más radical: quería eliminar los irracionales del análisis, y criticó todas las construcciones de las que estamos hablando.

Sin entrar en detalles, Weierstrass considera los irracionales como sumas de series compuestas por números racionales. Ahora bien, *no define* un número real como la suma de una serie de racionales, ya que esto equivaldría a presuponer que la suma de una serie tiene un sentido dado de antemano; por el contrario, Weierstrass sólo supone dada la aritmética de los racionales, y en particular el significado de una suma de *finitos* números racionales. Su solución consiste en definir los números reales como agregados de (infinitos) números racionales que satisfacen la condición de que la suma de cualquier cantidad finita de números pertenecientes al agregado es finita (i.e., existe un número racional mayor que la suma). Con esto se evita el error antes indicado, y se está ahora -y sólo ahora- en condiciones de demostrar que toda serie convergente tiene suma.[43]

Georg Cantor llegó a Berlin en 1863, siendo alumno de Weierstrass y Kronecker. Weierstrass explicaba en clase su construcción, que guarda con la de Cantor una estrecha relación: a toda serie corresponde una sucesión (la de sumas parciales) y a una serie sumable corresponde una sucesión que satisface la condición de Cauchy. Cantor empleó precisamente sucesiones de Cauchy, o 'sucesiones fundamentales', para la construcción de los irracionales; a la altura de 1872, incluso su terminología era la de su maestro, pues llamaba a los irracionales 'magnitudes numéricas'. De todos modos, la reformulación de Cantor sólo resulta 'natural' para un matemático cercano a la tradición conjuntista, de manera que corremos peligro de olvidar las dificultades que presentaba en la época el acceso a esa nueva mentalidad. Porque si el paso dado por Cantor no era difícil técnicamente, sí lo era conceptualmente: una sucesión no es algo del mismo tipo que sus elementos, ni da lugar a un todo homogéneo con ellos, y así se pierde la continuidad con la noción tradicional del número como magnitud, a la que Weierstrass se adhiere todavía. Cantor define los irracionales de modo abstracto, y aquí está la principal ruptura con la tradición y con Weierstrass.

Cantor publicó su teoría de los irracionales como parte de un artículo que trataba de series trigonométricas. Esto, unido a su menor interés por la fundamentación, explica que su exposición no sea ni mucho menos tan metódica como la de Dedekind. Como ya he dicho, utiliza lo que más tarde llamará 'sucesiones fundamentales':

---

[43] Cf. G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, §9, en *Gesammelte Abhandlungen*, 184-185. Se pueden encontrar redacciones de cursos de Weierstrass en los apéndices a P. Dugac, 'Eléments d'analyse de Karl Weierstrass', *Archive for History of Exact Sciences*, 10 (1973), 41-176.

> Si hablo de una magnitud numérica en sentido amplio, esto sucede por de pronto en el caso de que exista una serie infinita de números racionales
>
> $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \qquad (1)$$
>
> dada mediante una ley, con la característica de que la diferencia $a_{n+m}-a_n$ se hace infinitamente pequeña según n crece, cualquiera que sea el número entero positivo m, o con otras palabras, que para un ϵ cualquiera (racional y positivo) existe un número entero n_1 tal que $(a_{n+m}-a_n) < \epsilon$, si $n \geq n_1$ y si m es un número entero positivo cualquiera. Esta característica de la serie (1) la expreso con las palabras: "*La serie* (1) *tiene un límite b determinado.*"[44]

De este modo, a cada sucesión fundamental se le asigna "un símbolo *b* particular", y la expresión 'tiene un límite' carece en principio de otro significado que la propiedad de (1). Cantor define la igualdad entre símbolos correspondientes a dos sucesiones, y la diferencia claramente de la identidad entre las sucesiones; en realidad se trata de una relación de equivalencia, si bien Cantor nunca dio el paso de considerar clases de equivalencia de sucesiones. Esto es llamativo porque Dedekind, con su mentalidad de algebrista, considera una y otra vez relaciones de equivalencia y clases de equivalencia ya desde finales de los años 1850. La teoría de Cantor se completa con la definición de la relación de orden y las operaciones entre los símbolos *b*, por medio de las relaciones y operaciones entre los números racionales que forman sus correspondientes sucesiones.

Como vemos, un rasgo común a Weierstrass y Cantor es que utilizan herramientas tradicionales del análisis -series y sucesiones, respectivamente- para la construcción de los irracionales; en esto, Dedekind presenta una novedad importante, ya que su construcción emplea simples conjuntos (cortaduras). Una cortadura no es otra cosa que una partición del conjunto **Q** de los números racionales en dos subconjuntos $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ tales que todo elemento de $\mathbf{A}_1$ es menor que todo elemento de $\mathbf{A}_2$.

---

[44] 'Sobre la generalización de un teorema de la teoría de series trigonométricas', en *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts* (Hildesheim: Olms, 1966), 92-93. La terminología de la época no estaba muy consolidada, de manera que el término 'Reihe' [serie] se refería tanto a series como a sucesiones; sin embargo, el contexto deja claro de qué se trata en cada caso.

Todo número racional determina una cortadura, pero puede demostrarse que existen (infinitas) cortaduras no determinadas por números racionales; el conjunto de todas las cortaduras es continuo, e isomorfo al de los números reales. Las sucesiones son objetos con una estructura más compleja que las cortaduras: son conjuntos ordenados, y en el caso de las sucesiones fundamentales se presuponen también ciertas propiedades topológicas. En el caso de las cortaduras, es el orden del conjunto de los racionales -no su topología- lo que desempeña el papel fundamental, pero sólo en la definición de las cortaduras, que por su parte no tienen más estructura interna que un conjunto cualquiera.[45] Por estos motivos, puede decirse que el enfoque de Dedekind es a la vez más abstracto y más simple que los otros dos. Como escribía Pringsheim ya en 1898,

> Precisamente porque el método que sigue Dedekind para la introducción de los irracionales no se funda en ningún algoritmo aritmético, consigue las ventajas de una gran claridad y concisión. Por las mismas razones resulta notablemente más abstracto que el de Cantor y se utiliza con menos comodidad en los cálculos.[46]

La manera en que Dedekind prescinde de las construcciones habituales del análisis para ceñirse a 'lo esencial del asunto', es totalmente característica de su estilo. Siempre pensó que la teoría debe desarrollarse de la forma más inmediata, sin preocuparse de las necesidades del cálculo, que sólo deben aparecer en su aplicación. En un artículo sobre teoría de ideales, Dedekind resumió los requisitos metodológicos a que se ajustaba su teoría del modo siguiente:

> La legitimidad o sobre todo la necesidad de tales exigencias, que deberían imponerse siempre en la introducción o la creación de nuevos elementos aritméticos, resultará aun más evidente por comparación con la introducción de los números *reales irracionales*, objeto del que me he ocupado en un escrito especial (*Stetigkeit und irrationale*

[45] El hecho de que el procedimiento de Cantor se base en propiedades topológicas, y el de Dedekind en propiedades de orden, hace que sus construcciones dejen de dar resultados equivalentes cuando se realizan sobre la base de conjuntos distintos del de los racionales.

[46] A. Pringsheim, o.c., 56.

Zahlen; Brunswick, 1872). Admitiendo que la aritmética de los números *racionales*, cuyo conjunto [ensemble] designaremos por ***R***, esté definitivamente fundada, se trata de saber de qué manera debemos introducir los números irracionales y definir las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división ejecutadas sobre esos números. Como primera exigencia reconozco que la aritmética debe mantenerse exenta de toda mezcla de elementos extraños, y por esta razón rechazo la definición según la cual el número sería la razón entre dos magnitudes de la misma especie; por el contrario, la definición o la creación del número irracional debe estar fundada únicamente sobre fenómenos que se pueda ya constatar claramente *en el dominio* ***R***. En segundo lugar, se deberá exigir que todos los números reales irracionales puedan ser engendrados a la vez por una definición común, y no sucesivamente como raíces de ecuaciones, como logaritmos, etc. La definición deberá, en tercer lugar, ser de tal naturaleza que permita también una definición perfectamente clara de los cálculos (adición, etc.) que habrán de realizarse sobre los nuevos números.[47]

5.2. Hoy en día, lo habitual es no recurrir a construcciones de los números reales, sino simplemente presentar un sistema de axiomas. Este enfoque resultaba seguramente imposible en la época que consideramos. En primer lugar, hay una razón de tipo psicológico, y es que había que explicar por qué los reales se llamaban 'números', y esto requería mostrar su génesis a partir de otros números más elementales. Pero había otra razón más sofisticada: el método de construcción suministraba por vez primera un modelo de conjunto continuo, en un momento en que se desconfiaba profundamente de las 'evidencias' geométricas. Antes de la existencia de estos modelos, la simple postulación axiomática se hubiera considerado arbitraria y poco rigurosa, y en este sentido creo que las construcciones de Weierstrass, Cantor y Dedekind fueron un requisito histórico fundamental para la aparición de ideas axiomáticas más sofisticadas, como las de Hilbert.

---

47 'Sur la théorie des nombres entiers algébriques' (1876), en *Werke*, III, 269 nota.

De todos modos, tanto la construcción axiomática del conjunto de los números reales como la de la geometría rinden tributo a Dedekind y Cantor en lo que éstos consideraron como el punto central de sus artículos: la noción de continuidad. Este tema aparece más claramente en el artículo de Dedekind, porque constituye el centro de la exposición: da una definición de continuidad, que le sirve de guía para construir los números reales, y finalmente demuestra que el conjunto de los números reales satisface su definición, de modo que es continuo. Cantor no da estos pasos y resulta menos claro, pero existe un punto de acuerdo fundamental entre él y Dedekind en sus declaraciones sobre la geometría. Ambos afirmaron que la continuidad, *construible* en aritmética, *no es necesaria* en geometría, ni puede tampoco construirse, por lo que sólo puede ser objeto de *postulación*. Tras indicar el modo de adscribir un número real a cualquier punto dado de una recta, escribe Cantor:

> Pero para completar la conexión expuesta en este apartado entre el dominio de las magnitudes numéricas definidas en el § 1 y la geometría de la línea recta, ya sólo queda introducir un *axioma* que consiste simplemente en que también, a la inversa, a cada magnitud numérica le corresponde un determinado punto de la recta, cuya coordenada es igual a aquella magnitud numérica [...]
> Llamo *axioma* a esta proposición, porque está en su naturaleza el no ser demostrable en general.[48]

Dedekind habla del tema en forma paralela al final del § 3, donde dice que confía en que todo el mundo acepte el principio de continuidad en geometría,

> porque no estoy en condiciones de ofrecer ninguna demostración de su corrección, y nadie lo está. La suposición de esta propiedad de la línea no es más que un axioma [...]
> Si el espacio tiene una existencia real, sin duda *no* es necesario que sea continuo [...] Y si supiéramos con certeza que el espacio es discontinuo, sin duda nada nos podría

48 o.c., 97. El sentido de la palabra axioma que Cantor aclara aquí coincide con el que emplea Dedekind, y es radicalmente distinto del que usará la axiomática; axioma no es cualquier proposición en que se basa una teoría, sino, al modo antiguo, una proposición indemostrable. En el caso de Dedekind, como veremos, la diferencia resulta fundamental en cuanto se relaciona con el logicismo.

> impedir, si así lo quisiéramos, que lo hiciéramos continuo en el pensamiento rellenando sus lagunas [...].

En 1888 escribirá que sólo la "construcción puramente lógica" del sistema numérico nos permite conectar nuestras ideas de espacio y tiempo con la noción de continuidad.

Con esto se completa algo así como la inversión del planteamiento tradicional del número. Antes se pensaba que la continuidad numérica venía impuesta por las características de las magnitudes, a través de la definición de número como proporción; ahora se resalta el hecho de que la continuidad numérica es construible en abstracto, y que es ella la que nos permite atribuir continuidad a cualquier dominio de magnitudes. Una vez dado el paso de definir con precisión la continuidad, resultaba ya posible demostrar con todo rigor los teoremas elementales del análisis a los que aludimos en el apartado primero, como hace Dedekind a propósito del teorema de que toda sucesión acotada de números reales tiene un límite.

El tema de la situación del principio de continuidad en geometría y aritmética nos lleva a otra cuestión fundamental para entender el planteamiento de Dedekind. En su caso, y posiblemente en el de otros matemáticos, me parece indudable que la construcción conjuntista de los números reales fue un factor decisivo para la aparición del programa logicista. La teoría de conjuntos era considerada entonces (y lo fue hasta principios de siglo, cuando las antinomias llevaron a otras conclusiones) como una simple parte de la lógica. El hecho de que por medios lógicos se pudiera construir lo que sólo podía ser postulado -o quizá probado experimentalmente- en geometría, era un fuerte argumento a favor de que la aritmética no dependía de axiomas en el sentido anterior, siendo sólo una rama de la lógica. *¿Qué son y para qué sirven los números?* comienza diciendo que "la aritmética (álgebra, análisis) es sólo una parte de la lógica".

> Acerca de la relación entre la teoría de proporciones de Eudoxo y las cortaduras de Dedekind, puede decirse lo siguiente. Para empezar, la estrecha relación que algunos han visto entre ambas sólo puede establecerse cometiendo un cierto anacronismo con los griegos, un anacronismo del tipo que los matemáticos del siglo XIX, gracias a la concepción moderna del número, estaban dispuestos a cometer. Eudoxo compara dos pares de magnitudes homogéneas empleando números naturales, pero -aquí está el anacronismo- se puede reformular su método empleando números racionales; decimos que las razones $a:b$ y $c:d$ son iguales si para todo número racional r, o bien

$a{:}b > r$ si y sólo si $c{:}d > r$, o
$a{:}b = r$ si y sólo si $c{:}d = r$, o
$a{:}b < r$ si y sólo si $c{:}d < r$.

De esta manera, cada razón $a{:}b$ determina de forma unívoca un conjunto de números racionales r_1 menores que $a{:}b$, y un conjunto de números racionales r_2 mayores que $a{:}b$ (si $a{:}b = r$, el número r puede asignarse tanto al primer conjunto como al segundo, dos supuestos que Dedekind considera "inesencialmente diferentes"). Si denominamos R_1 y R_2 a cada uno de esos conjuntos, el par (R_1,R_2) constituye una cortadura en el sentido de Dedekind. De todas formas, en lo que hemos dicho hasta aquí sólo se demuestra que toda proporción dada determina una cortadura; ni se define la continuidad, ni se definen los irracionales como cortaduras, ni mucho menos se demuestra la continuidad del conjunto así definido. Esta cuestión reaparecerá en la correspondencia entre Dedekind y Lipschitz.

6. LA CORRESPONDENCIA CON CANTOR.

Georg Cantor es habitualmente considerado como el creador de la teoría de conjuntos, desarrollada paulatinamente en trabajos que comenzaron a aparecer en 1874. Entretanto, Cantor y Dedekind se habían conocido casualmente en Gersau (Suiza) durante el verano de 1872, después de la aparición y el envío recíproco de sus artículos sobre los irracionales. El encuentro motivó sin duda interesantes discusiones, sobre las que desgraciadamente no tenemos ninguna noticia directa. Ahora bien, a la luz de la anterior reconstrucción de la evolución del pensamiento de Dedekind, resulta probable que la teoría de conjuntos desempeñara un papel central en las conversaciones de 1872: es probable que Dedekind haya comunicado a Cantor sus ideas, poniéndole al día de las convicciones que había ido alcanzando a lo largo de años de reflexión sobre el tema. Con todo, los intereses de ambos eran bastante distintos, casi diríamos complementarios, ya que ninguno publicó sobre los temas característicos del otro. Sin embargo, en 1873 comenzó un intercambio de correspondencia que desempeñó un importante papel en el desarrollo de las ideas de Cantor, y por este motivo es considerada como uno de los documentos más importantes que se conservan de la matemática del XIX.[49]

---

[49] E. Noether y J. Cavaillès (eds.), *Briefwechsel Cantor-Dedekind* (Paris: Hermann, 1937). Las cartas de 1899 fueron publicadas por Zermelo en su edición de las obras de Cantor,

Las ideas expuestas por Cantor en su artículo de 1872 avanzaban notablemente en dirección a la teoría de conjuntos. Como ya he dicho, en ese artículo no se limitaba a definir los irracionales, sino que se ocupaba de una cuestión de teoría de series trigonométricas. Para ello introducía una noción que le sería muy útil en sus ulteriores investigaciones conjuntistas y que hoy es básica en la topología conjuntista. Se trata de la noción de *conjunto derivado* de un conjunto **P** de puntos (o de números reales). Se llama *punto de acumulación* de **P** a un punto tal que en todo entorno suyo existen infinitos puntos pertenecientes a **P**; Cantor define el *primer* conjunto derivado de **P**, denotado por **P'**, como el conjunto de todos los puntos de acumulación de **P**, y análogamente deriva **P''** a partir de **P'**, etc. El estudio de las características de los conjuntos derivados de **P** le permitía deducir propiedades importantes del propio **P**. Es en esta parte de su artículo, más que en su teoría de los irracionales, donde realmente encontramos ideas conjuntistas importantes.

El desarrollo de tales ideas le conduciría, en una serie de artículos publicados en la década 1874-1884, a toda una serie de ideas fundamentales de la teoría abstracta y topológica de conjuntos. Junto a la noción de conjunto derivado, quizá la otra fuente fundamental de los nuevos planteamientos cantorianos fue el estudio de la cardinalidad de los conjuntos infinitos; este tema fue el que inauguró su correspondencia conjuntista con Dedekind en 1873.

La comparación del número de elementos de dos conjuntos puede realizarse sin necesidad de contar, simplemente estableciendo una correspondencia biunívoca entre los elementos de ambos. Así, podemos saber si en una mesa hay tantos platos como vasos sin necesidad de contarlos, simplemente observando si a cada plato corresponde un vaso. Este método es la base de la comparación de cardinales infinitos; si dos conjuntos pueden ponerse en correspondencia biunívoca decimos que *tienen el mismo cardinal* o que son *equipotentes*. Como ejemplo, basta considerar el hecho de que el conjunto de los números naturales puede ponerse en correspondencia biunívoca con subconjuntos suyos, como el de los números pares (la correspondencia es en este caso $n \longrightarrow 2n$) o el de los números primos. También podemos hacerle corresponder unívocamente conjuntos que lo contienen, como el de los números enteros, lo que se logra *reordenando* los enteros, por ejemplo del modo siguiente: 0, 1, -1, 2, -2, ..., n, $-n$, ... Estos resultados son aparentemente

---

Gesammelte Abhandlungen, 443-450. La parte no matemática de la correspondencia puede encontrarse en Dugac, *Dedekind et les fondements des mathématiques*, apéndice XL, 223-262.

paradójicos, dado que esperamos que los conjuntos infinitos se comporten análogamente a los finitos; sin embargo, no sucede así, y todo conjunto infinito puede hacerse corresponder biunívocamente con un subconjunto suyo. Dedekind tuvo la idea de emplear esta característica como *definición* de los conjuntos infinitos.

El interés por los cardinales infinitos fue totalmente peculiar de Cantor. Años atrás había notado ya que, del mismo modo que en los ejemplos anteriores, el conjunto de los números racionales y el de los naturales son equipotentes, tienen exactamente el mismo número de elementos (lo que se demuestra de nuevo, como en el caso de los enteros, reordenando los racionales). Por este camino llegó a plantearse la cuestión de si el conjunto de los números reales y el de los racionales tienen el mismo cardinal, problema sobre el que escribió a Dedekind a finales de 1873. ¿Puede pues establecerse una correspondencia biunívoca entre los naturales y los reales? O dicho de otro modo, ¿son *numerables* los números reales? Dedekind se reconoció incapaz de dar una respuesta, si bien simultáneamente le envió una demostración de que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable en el sentido anterior. Pocos días después, estimulado por saber que Dedekind no conocía la respuesta, lo que le llevaba a pensar que estaba frente a una dificultad real y no subjetiva, Cantor consiguió finalmente establecer el resultado de que los reales no son numerables. Esto equivale a decir que existen distintos tipos de infinito, o más precisamente distintos cardinales infinitos; con ello se obtiene una aclaración muy importante sobre la noción de continuidad, que involucra un nuevo cardinal infinito.

Para el lector que no conozca esta famosa demostración, y dado el interés de la cuestión, indicaré cómo puede probarse algo semejante. La prueba de 1873 era bastante complicada, pero Cantor descubrió hacia 1890 otro método de prueba sorprendentemente simple, que se conoce con el nombre de *procedimiento diagonal de Cantor*. Demostraremos que los números reales del intervalo (0,1) no son numerables. Todo número real de ese intervalo puede expresarse en la forma decimal (α) $0{,}a_1a_2a_3\ldots$, donde los a_i son cifras del 0 al 9; por otro lado, todo número de la forma (α) pertenece al intervalo (0,1). Supongamos que los números reales del intervalo (0,1) son numerables; entonces existe una enumeración de los mismos en la que aparecen todos ellos, o lo que es lo mismo, puede establecerse una lista

$$\begin{array}{l} 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\ldots \\ 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\ldots \\ 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}\ldots \\ \vdots \end{array}$$

en la que aparecerán todos los números de (0,1).

Para probar la falsedad de nuestra suposición construiremos un número real perteneciente a (0,1), que llamamos $0,b_1b_2b_3...$, que no puede pertenecer a la lista anterior. La cifra b_1 de nuestro número se establecerá atendiendo a la primera cifra $a_{1,1}$ del primer elemento de la lista. Nuestra intención es que estas dos cifras sean diferentes, cosa que lograremos, por ejemplo, poniendo $b_1=0$ si $a_{1,1}\neq 0$, y en caso contrario, si $a_{1,1}=0$, poniendo $b_1=1$. Del mismo modo estableceremos la cifra b_2 atendiendo a la segunda cifra $a_{2,2}$ del segundo elemento; en general, la cifra *i*-ésima de nuestro número se establecerá atendiendo a la cifra $a_{i,i}$ de la lista, poniendo $b_i=0$ si $a_{i,i}\neq 0$, $b_i=1$ si $a_{i,i}=0$. Es evidente que el número construído es un número del intervalo (0,1) ya que es de la forma (α), y por el método diagonal empleado en su construcción, dicho número se diferencia de cada número de la lista en al menos una cifra. De esta manera tan simple hemos probado que el conjunto de los reales comprendidos en (0,1) no es numerable. El mismo procedimiento diagonal se emplea para demostrar importantes teoremas sobre cardinales, como por ejemplo el que dice que el cardinal del conjunto potencia (conjunto de todos los subconjuntos) de un conjunto dado **C** es siempre mayor que el cardinal del propio **C**. Con ello, la sucesión de los cardinales es infinita.

En 1873 Cantor publicó un artículo titulado 'Sobre una propiedad del conjunto de todos los números reales algebraicos', conteniendo las demostraciones de la numerabilidad de los números algebraicos y la no numerabilidad de los reales.[50] Uniendo ambos resultados, obtenía también una demostración indirecta de que el conjunto de los números reales debe contener números no algebraicos, los llamados números trascendentes, entre los que se encuentran los famosos números π y e. En este artículo, Cantor ni siquiera mencionaba el nombre de Dedekind, cosa que sin duda le molestó, ya que el trabajo incluía su demostración sobre los números algebraicos y ciertas simplificaciones de la demostración sobre los números reales, que también le había propuesto por carta. Por este motivo, Dedekind escribió unos apuntes sobre la correspondencia de 1873 indicando qué parte del trabajo se debía a él y cuál a Cantor, y mencionando los pasajes relevantes de las cartas.[51]

---

[50] 'Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen', *Gesammelte Abhandlungen*, 115-118.

[51] *Briefwechsel Cantor-Dedekind*, 18-20. Sobre este tema, pueden encontrarse más detalles en mi 'On the Relations between Cantor and Dedekind', *Historia Mathematica* **20** (1993), 343-36.

La correspondencia sufrió una interrupción de casi tres años, hasta que se reanudó con comentarios sobre los irracionales en 1877. Cantor había planteado ya en una carta de enero de 1874 la cuestión de si sería posible establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y los de un plano (o lo que es lo mismo, los del segmento unidad y los del cuadrado construido sobre él). En 1877 le comunica a Dedekind una demostración simple de que *sí* es posible hacerlo, a la que Dedekind encuentra una pega. El 25 de junio le envía una prueba más complicada que obtiene su aprobación. La prueba demostraba que podemos determinar cada punto de un espacio bidimensional mediante una sola variable, y suscitaba inmediatamente el problema de que aquel espacio aparecía como unidimensional. Esto llevaba a Cantor a dudar de que haya una relación necesaria entre el número de dimensiones y el número de variables que es preciso emplear: "todas las deducciones filosóficas y matemáticas que hacen uso de esa suposición errónea son inaceptables."[52]

Como los trabajos de Riemann y otros se basaban en la mencionada relación, y temiendo que Cantor se atreviera a negar la invariancia de la dimensión, Dedekind le contestó el 2 de julio justificando el empleo de dicha suposición por aquéllos matemáticos sobre la base de otro supuesto implícito, la continuidad. Concretamente, Dedekind formula por vez primera el teorema de invariancia de la dimensión:

> «Si se consigue establecer una correspondencia recíprocamente unívoca y completa entre los puntos de una variedad continua A de *a* dimensiones por un lado, y los puntos de una variedad continua B de *b* dimensiones por el otro, entonces, si *a* y *b* son *desiguales, esta misma correspondencia* es necesariamente *discontinua en todo punto*.»[53]

Esta conjetura fue indicada por Cantor en su siguiente artículo, 'Una contribución a la teoría de variedades' (1878), donde se incluían las dos demostraciones anteriores y las pegas de la primera, también sin ninguna mención de Dedekind.[54] La conjetura sobre la invariancia de la dimensión provocó una avalancha de artículos: Thomae, Lüroth, Jürgens, Netto y el

[52] *Briefwechsel Cantor-Dedekind*, 34.
[53] *Briefwechsel Cantor-Dedekind*, 38.
[54] 'Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre', en *Gesammelte Abhandlungen*, 119-133.

propio Cantor trataron de probarlo, aunque la primera demostración satisfactoria no apareció hasta 1911, obra del famoso intuicionista L. E. J. Brouwer.[55]

Los dos episodios que acabo de comentar son de los más importantes en toda la correspondencia, y atañen a los dos primeros trabajos de Cantor sobre teoría de conjuntos en sentido propio. La correspondencia continuó con bastantes interrupciones hasta finales de 1882, cuando Cantor comunica su introducción de los números transfinitos.[56] Dedekind no pareció interesarse mucho, ni en este momento ni nunca, por el tema preferido de Cantor, el de los números transfinitos. Además Cantor sufrió en 1884 el primero de sus ataques depresivos, que fue muy serio e inauguró la larga serie de ataques que le acompañaría en sus últimos años. Sólo reencontramos algo de correspondencia en 1899, momento en que se toca el tema de las antinomias, del que luego hablaremos.

No cabe duda de que la correspondencia fue muy discontinua y de que no llegó a haber una auténtica colaboración entre los dos matemáticos; esa discontinuidad es reconocida por el propio Cantor en una carta a Hilbert, donde dice acerca de Dedekind:

> [..] durante años me había guardado rencor por *razones que desconozco* y *casi había roto* la antigua correspondencia de 1871 *a* 1874.

La extrañeza de Cantor resulta sorprendente, ya que por lo anterior es evidente que Dedekind se distanció a consecuencia de su ingratitud al no reconocer lo que debía a su colaboración en los primeros artículos.[57]

---

55 'Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl', *Mathematische Annalen* 70 (1911), 161-165; reimpreso en Brouwer, *Collected Works*, vol.2 (Amsterdam: North-Holland, 1976), 430-434.

56 Los números transfinitos sirven para representar diversas propiedades de los conjuntos infinitos. En 1882 Cantor introdujo los *ordinales* transfinitos, que representan el 'tipo de orden' de los conjuntos bien ordenados y le permitieron completar de modo notable su teoría de las cardinalidaes infinitas; cf. mi 'Cantor's Discovery of Transfinite Numbers', *Historia Mathematica* 22 (1995), 33-42. En 1895 introdujo los *cardinales* transfinitos, que representan las distintas potencias o cardinales de conjuntos infinitos; el cardinal del conjunto N se designa $\aleph_0$, etc. Si llamamos c al cardinal del conjunto de los números reales, la famosa *hipótesis del continuo* de Cantor, que conjetura que c es el cardinal inmediatamente siguiente a $\aleph_0$, puede expresarse en la forma $c = \aleph_1$.

57 Con otros matemáticos Cantor se comportó de forma más deportiva; la explicación de su conducta en este caso se encuentra posiblemente en sus ambiciones profesionales y su relación con Kronecker. Cantor había sido alumno de Kronecker, y durante los años 1870 guardó todavía muy buenas relaciones con él; por otro lado, siempre

Las consecuencias de esa ingratitud son innegables: basta pensar que hasta la publicación de la correspondencia en 1937 se creía que el teorema de numerabilidad de los números algebraicos y la conjetura del teorema de invariancia de la dimensión se debían a Cantor. En todo caso, resulta también claro que la postura de Dedekind de no mostrar directamente su enfado empeoró las cosas todavía más; la relación entre ambos da buenos indicios sobre las respectivas personalidades. También puede señalarse que en la correspondencia sólo se tratan los temas que preocupaban a Cantor, quien parece interesado en Dedekind sólo como corrector de sus ideas, y muestra poca intención de conocer sus propias investigaciones.

Con todo, la relación entre los dos matemáticos fue provechosa para ambos, y cada uno recibió estímulos importantes de la obra del otro. Cantor obtuvo sin duda más beneficios, aunque su fama no habría sido menor si hubiera reconocido lo que debía a Dedekind: la dirección en que desarrollaron sus ideas es muy distinta, y es innegable la novedad de las ideas cantorianas. Ya he dicho que Dedekind no escribió nunca sobre temas cantorianos, que son los que se han hecho característicos de la teoría abstracta de conjuntos; pero desde finales de los años 1850 venía considerando conjuntos infinitos, y los métodos que desarrolló en *¿Qué son y para qué sirven los números?* tendrían gran importancia en la teoría de conjuntos de nuestro siglo. Además, su contribución fue decisiva para que la teoría de conjuntos se convirtiera en una herramienta de las investigaciones matemáticas, y en especial para el desarrollo de un planteamiento conjuntista-estructural en álgebra. Por tanto, haciendo la salvedad de que no contribuyó directamente a la teoría de conjuntos transfinitos, puede decirse sin embargo que su papel en el nacimiento de la teoría de conjuntos fue fundamental. En cuanto a la importancia de Cantor para su obra, el hecho de que comenzara a escribir en 1872 el primer borrador de *¿Qué son y para qué sirven los números?* está seguramente relacionado con sus entrevistas con aquél en el verano de ese mismo año. La aparición de un matemático que había llegado independientemente a ideas conjuntistas avanzadas, como lo demostraba el artículo sobre números reales y conjuntos derivados, fue sin duda un estímulo fundamental.

---

se consideró con cierto derecho a obtener una plaza en Berlin, la universidad más importante del momento, donde Kronecker tenía una posición de enorme influencia. Ahora bien, Kronecker estaba profundamente disgustado con Dedekind por haber publicado antes que él una teoría de ideales satisfactoria, y seguramente Cantor temía perder su apoyo si mencionaba la colaboración con Dedekind. Quizá influyó también el hecho de que la teoría de conjuntos fue el tema de investigación de toda la vida de Cantor, quien sin duda tendió a olvidar los méritos de sus colegas en este campo. Para más detalles, cf. mi artículo antes citado.

7. ¿QUÉ SON Y PARA QUÉ SIRVEN LOS NÚMEROS?

Una vez lograda la aplicación del método de construcción a los irracionales, estaba claro que era posible construir todo el sistema numérico sobre la única base de los números naturales. Por este motivo, Dedekind no se planteó la tarea de elaborar cada uno de los pasos de construcción, sino otra cuestión mucho más ambiciosa: presentar la teoría general en que se basa todo el proceso, y reducir los propios números naturales a nociones más generales. Como escribirá a Keferstein en 1890, había dos cuestiones que plantear a propósito del conjunto o serie ℵ de los números naturales:

> ¿Cuáles son las propiedades básicas, independientes entre sí, de esta serie *N*, es decir, aquellas propiedades que no pueden deducirse unas de otras pero de las cuales se siguen todas las demás? Y ¿de qué manera hay que despojar a estas propiedades de su carácter específicamente aritmético, de manera que queden subordinadas a conceptos más generales y a actividades del entendimiento tales que *sin* ellas no es posible en absoluto el pensamiento, pero *con* ellas viene dado el fundamento para la seguridad y completud de las demostraciones, así como para la construcción de definiciones libres de contradicción?

El punto de vista en que se situaba Dedekind era el de un logicista convencido: se trataba de plantear la teoría del sistema numérico empleando exclusivamente nociones lógicas esenciales.

Como veíamos en el apartado 4, ya en su lección de habilitación Dedekind se declaraba a favor de considerar los números naturales ante todo en su aspecto de ordinales:

> La aritmética elemental surge de la construcción de los números ordinales y cardinales; el paso sucesivo de un término de la serie de los números enteros absolutos al inmediatamente siguiente es la primera y más sencilla operación de la aritmética; sobre ella se fundan todas las demás.[58]

---

[58] Consideramos al número 5 como ordinal si sólo pensamos en el hecho de que es el sucesor del 4; lo vemos como cardinal si pensamos en que por medio del 5 expresamos la propiedad de un conjunto de tener cinco elementos, o, dicho sin círculos viciosos, de ser equipotente con (aplicable biunívocamente en) el conjunto {1,2,3,4,5}.

Este punto de vista era bastante habitual, y entre sus defensores podemos citar a Kronecker y Helmholtz (cuyos artículos cita el propio Dedekind) así como a Hamilton, que expresó la idea de una manera muy clara:

> No puedo imaginarme *contando* cualquier conjunto [set] de cosas sin *ordenarlas* primero, y tratarlas como *sucesivas*: por *arbitraria* y *mental* (o *subjetiva*) que pueda ser la sucesión asumida.[59]

El caso es que en la época en que se publicó *¿Qué son y para qué sirven los números?* esta idea estaba de algún modo en retroceso: tanto Cantor como el famoso lógico Gottlob Frege se mostraron a favor de basarse en la noción de cardinalidad; más tarde, Bertrand Russell se sumará a ellos.

En este punto, Frege fue mucho más riguroso que Cantor, y de hecho la teoría expuesta en su libro *Los fundamentos de la aritmética* (1884) puede verse como la contrapartida perfecta a la de Dedekind. Para verlo, consideremos el siguiente problema filosófico: ¿qué son realmente los números, si llamamos números tanto a '1, 2, 3 ...', como a 'uno, dos, tres, ...', como a ' one, two, three, ...', etc.? Frege respondió que los números son objetos perfectamente concretos que existen en un cierto mundo ideal, y su análisis de los naturales se desarrolló de acuerdo con esa idea.[60] Dedekind, por el contrario, se limitó a señalar que todos los conjuntos de números (ya sean en una lengua o en otra, ya los denotemos con cifras árabes o chinas) tienen una misma estructura, y que esta estructura es lo que caracteriza al conjunto de los números naturales.[61]

---

59 'Preface to Lectures on Quaternions', o.c., 125 nota.

60 Cf. la traducción española del libro de Frege: Barcelona, Laia, 1972. Su planteamiento puede llamarse esencialista, porque pretendía que los números naturales fueran objetos 'diseñados' -por así decir- precisamente para contar, esto es, para expresar cardinalidades. Del mismo modo, consideró insatisfactorias las construcciones de los irracionales, ya que los números reales debían ser objetos 'diseñados' precisamente para medir; cf. P. M. Simons, 'Frege's Theory of Real Numbers', *History and Philosophy of Logic* **8** (1987), 25-44.

61 Esta cuestión ha seguido teniendo una cierta vigencia entre los filósofos de las matemáticas; véase cómo el filósofo americano P. Benacerraf plantea este mismo problema y le da la misma solución que Dedekind en 'What Numbers Could Not Be' (1965), incluido en la recopilación *Philosophy of Mathematics: Selected readings* (Cambridge: University Press, 1983) editada por Benacerraf y H. Putnam.

7.1. Lo realmente original del libro de Dedekind es la manera en que conecta ese análisis del número como ordinal con su teoría de conjuntos y aplicaciones. Su exposición comienza con los rudimentos de la teoría de conjuntos; aquí, Dedekind recoge las operaciones que había utilizado en álgebra y teoría de números, y se sitúa con toda claridad en la misma línea abstracta que habíamos visto a propósito de su versión de la teoría de Galois. La matemática va a hablar de 'cosas', y 'cosa' es "todo objeto de nuestro pensamiento"; en particular, un conjunto "es igualmente, como objeto de nuestro pensamiento, una cosa". La continuidad entre los planteamientos de finales de los 1850 y los de 30 años más tarde está clara: allí se formulaba la noción de grupo indicando que era aplicable a cualquier "dominio [...] de elementos, cosas, conceptos" en el que esté definida una ley de composición adecuada.

A continuación, Dedekind recoge su vieja noción de 'sustitución' bajo el nombre de 'representación' o aplicación [Abbildung].[62] Esta será de hecho la base de toda la teoría, y la gran novedad del libro: Dedekind es el primer matemático que introduce la noción de aplicación, y lo hace de una manera muy moderna. Primero considera aplicaciones cualesquiera, luego introduce la definición de aplicación inyectiva, que es lo que denomina 'representación similar o clara'. A este respecto hay que decir que aunque propiamente define la inyectividad, en la práctica considera aplicaciones biyectivas, sin duda porque la restricción del conjunto final a la imagen le parece trivial.

El germen del planteamiento expuesto en *¿Qué son y para qué sirven los números?* [QSN en lo que sigue] surgió en el momento en que Dedekind se dió cuenta de que la función sucesor puede concebirse como una aplicación de N en N.[63] Con esto se obtenía una gran simplificación: las nociones muy generales de conjunto y aplicación bastaban para edificar la aritmética, el álgebra y el análisis. Los números naturales iban a quedar caracterizados como un conjunto dotado de una cierta aplicación interna que le confiere una estructura particular; los demás tipos de números se obtendrían por construcción conjuntista hasta alcanzar el cuerpo de los números complejos; y las operaciones se desarrollarían sobre la base de la aplicación sucesor, por extensiones progresivas.

Como Dedekind menciona en el prólogo a su libro, la misma base era además suficiente para fundar y reconstruir el álgebra y el análisis

---

[62] Todavía hoy, los alemanes llaman a las aplicaciones 'Abbildungen'.

[63] Existe incluso un manuscrito que recoge el momento en que Dedekind tuvo esta idea clave, aunque no es posible datarlo; en todo caso, la idea es a lo sumo de 1872.

de la época. Esta afirmación puede interpretarse de la siguiente manera. Las estructuras algebraicas consideradas entonces no eran sino subconjuntos de los números complejos, cerrados para ciertas operaciones; y los morfismos entre estructuras introducidos por Dedekind no eran, como hemos visto, más que casos particulares de aplicación. En cuanto al análisis, ya hemos indicado que Dirichlet había planteado la noción de función (real) en sentido abstracto, como una correspondencia cualquiera entre valores numéricos; sin duda, Dedekind era consciente de que esto no era más que una aplicación entre conjuntos. Como los números reales y complejos se obtenían mediante construcción conjuntista, las simples nociones de conjunto y aplicación ponían a su alcance toda la gama de funciones del análisis.

Con esas ideas en mente, Dedekind comienza a escribir en 1872, estimulado por su relación con Cantor, un borrador de lo que luego será **QSN**; el borrador contiene todo lo fundamental del libro, salvo el teorema de definición recursiva.[64] En particular, la primera parte del borrador -la que procede de 1872- contiene ya las nociones conjuntistas básicas, las definiciones de aplicación y aplicación inyectiva, la definición de infinito, y la demostración del teorema de inducción.

Antes de proseguir con el tema de aplicaciones y función sucesor, no está de más decir algunas palabras sobre el infinito. Como hemos visto, Dedekind aceptaba el infinito actual ya en los años 1850. Ahora define lo que es un conjunto infinito **I** sobre la base de la existencia de una aplicación inyectiva f de **I** en un subconjunto propio de **I**; por ejemplo, el conjunto de los números naturales es infinito porque la aplicación $f(n) = 2n$ lleva cada elemento de $\mathbb{N}$ en un número par (y podríamos mostrar muchas otras aplicaciones que satisfacen la definición). El hecho de que los conjuntos infinitos tienen esta propiedad había sido observado mucho antes, por ejemplo por Galileo, y no faltó quien lo considerara como una *paradoja* que demostraba que el infinito actual era inaceptable; algunos indicaban que esa propiedad contradice el axioma euclidiano 'el todo es mayor que la parte'. En el siglo XIX, autores como Bolzano y Cantor se refieren de nuevo a la propiedad 'paradójica' sin concebirla como tal, sino como una característica de los conjuntos infinitos.[65] Pero es Dedekind quien por vez primera se plantea

---

[64] En esto tenemos que contradecir lo que dice el primer prólogo de Dedekind, véase más abajo.

[65] En 1851 se publicó el libro de Bolzano *Paradoxien des Unendlichen* (reimpreso en Leipzig: Meiner, 1920), que cronológicamente puede considerarse el primer libro conjuntista, pese a que apenas fue leído. En particular, las ideas de Cantor y Dedekind

la posibilidad y la necesidad de *definir* la noción de infinito, para lo que emplea aquella propiedad; esto está directamente relacionado con sus típicas exigencias de rigor deductivo, que prepararon el camino a los planteamientos axiomáticos. En conexión con ello, la exposición que hace Dedekind en su libro tiene otra peculiaridad llamativa: las propiedades de los conjuntos finitos se estudian sobre la base de conjuntos infinitos.

Como queda dicho, la característica principal de **QSN** es que el análisis ordinal de la noción de número se reformula empleando la idea de aplicación. La clave es la existencia de una aplicación φ: **C** —> **C**, que desempeñará el papel de la función sucesor; cuando existe una aplicación con esa característica, es decir cuando $\varphi(\mathbf{C}) \subseteq \mathbf{C}$, Dedekind dice que el conjunto **C** es una φ-cadena. Los conjuntos **C** isomorfos a $\aleph$ se caracterizan porque son φ-cadenas para una aplicación φ biyectiva, y porque hay un único elemento de **C**, al que llamamos 1, que no pertenece a $\varphi(\mathbf{C})$.

Ahora bien, Dedekind se dio cuenta de que esas tres condiciones no bastan para que el conjunto **C** sea un modelo satisfactorio de la aritmética. El argumento que le llevó a esta conclusión se encuentra en el punto 6 de la carta a Keferstein, aunque su correlato aparece ya en la primera parte del borrador, de 1872.[66] Se trata de algo especialmente notable por la modernidad del análisis realizado por Dedekind, que emplea razonamientos modelistas intuitivos y que le lleva a la noción de 'φ–cadena de un conjunto'.

Dedekind pretendía aislar un conjunto de propiedades que caractericen la estructura del conjunto de los números naturales de tal manera que la definición sea 'categórica', esto es, que cualquier conjunto que la satisfaga sea exactamente isomorfo a $\mathbb{N}$.[67] ¿Cómo llegó a la idea de categoricidad? Consideró los posibles conjuntos que satisfacen las tres condiciones anteriores; en cualquiera de ellos, el elemento 1 y sus

---

se desarrollaron al margen de Bolzano, aunque parece que la demostración que Dedekind da de la existencia de conjuntos infinitos se debe esencialmente a Bolzano. En cuanto a Cantor, indicó la propiedad en cuestión en un artículo de 1877, pero todavía en 1882 dudaba la posibilidad de *definir* el infinito y quedó sorprendido cuando Dedekind le comunicó su definición (carta de Dedekind a Weber, 24.01.1888).

66 La cuestión fue estudiada, a propósito de la carta a Keferstein, por el lógico matemático Hao Wang en su artículo 'The Axiomatisation of Arithmetic', *Jour. Symb. Logic* **22** (1957), 154-158, reimpreso en H. Wang, *A Survey of Mathematical Logic* (Amsterdam: North Holland, 1963), 68-81.

67 La noción de categoricidad de un sistema de axiomas fue explicitada por Edward Huntington y Oswald Veblen en 1902 y 1904 respectivamente.

sucesores según la aplicación φ (que pertenecen al conjunto por ser una φ-cadena) desempeñarían el papel de los números naturales, y podrían ser denominados 1, 2, 3,... Sin embargo, las tres condiciones anteriores no excluyen la posibilidad de que, además del 1 y sus sucesores, existan en **C** elementos que quedan -por así decir- al margen del orden de sucesión inducido por φ y 1; estos son lo que hoy en día denominaríamos 'elementos no estándar' de **C**.[68] Semejante conjunto sería totalmente inaceptable para la fundamentación de la aritmética, porque en este caso los razonamientos por inducción no resultarían concluyentes: del hecho de que 1 tenga una propiedad, y $n+1$ la tenga si la tiene n, no se sigue que todos los elementos de **C** gocen de esa propiedad. Por tanto, si queremos demostrar que las pruebas por inducción son concluyentes, es necesario introducir algún requisito adicional.

Para ello, introducimos un nuevo concepto. Siendo **A** un subconjunto de **C**, denominamos 'φ-cadena del conjunto **A**' a la intersección de todas las φ-cadenas que contienen a **A**, denotada por φ_0(**A**). Consideremos ahora la φ-cadena de $\{1\}$, $\varphi_0(\{1\})$, y habremos encontrado el conjunto que buscábamos, logrando el objetivo de excluir los elementos no estándar. Así pues, esta última condición nos permite definir categóricamente el conjunto de los números naturales. Decimos (QSN, 71) que un conjunto **C** tiene la estructura de $\mathbb{N}$ –es 'simplemente infinito'– si existe una aplicación φ de **C** y un elemento $1 \in$ **C** tales que

α. $\varphi(C) \subseteq C$,
β. $1 \notin \varphi(C)$,
γ. $\mathbf{C} = \varphi_0(\{\mathbf{1}\})$,
δ. φ es una aplicación biyectiva.

La aplicación biyectiva φ ordena el conjunto **C**, y el orden inducido es el de la función sucesor.

En la versión definitiva del libro, Dedekind dedica el § 10 a demostrar que, sobre la base de esa definición, dos conjuntos simplemente infinitos cualesquiera son isomorfos; con esto, todo conjunto simplemente infinito es isomorfo a $\mathbb{N}$, y queda demostrada la categoricidad. La idea clave de emplear la noción de *cadena de un conjunto*, para evitar la aparición de elementos no estándar, procede de 1872, ya que puede

---

[68] La condición $\varphi(C) \subseteq C$ es facil de satisfacer en este caso; sea **D** el conjunto de los elementos no estándar de **C**; extendemos φ de manera que $\varphi(D) \subseteq D$, por ejemplo estipulando que $\varphi(d) = d$ para todo $d \in D$.

encontrarse un pasaje, en la primera parte del borrador, donde se reflejan las dudas frente al problema y su solución.[69]

Ya hemos indicado que, en su libro, Dedekind estudia los conjuntos finitos sobre la base de conjuntos infinitos. De hecho, cada elemento de ℵ da lugar a una φ-cadena, que es el conjunto de todos sus sucesores; Dedekind estudia las propiedades de los 'segmentos iniciales' $\mathbf{Z}_n$ de ℕ (el conjunto de los *n* primeros elementos de ℕ) por medio de las propiedades del 'resto' de ℕ, esto es, por medio de la cadena de su sucesor $\varphi_0(\{n'\})$. También la relación de orden (mayor, menor) se estudia por medio de la teoría de cadenas, que de este modo es el núcleo del libro.

Ya en 1854 Dedekind estaba convencido de que la aplicación sucesor permitía definir la adición, multiplicación y potenciación de números naturales. Esto se logra mediante definiciones recursivas, un enfoque del que Dedekind estuvo siempre muy cerca ya que, como buen experto en teoría de números, las demostraciones por inducción fueron siempre sus preferidas. Es interesante notar que en el año 1861 Hermann Grassmann, el famoso precursor del cálculo vectorial, publica un *Manual de aritmética* en el que desarrolla este mismo enfoque, dando esencialmente las mismas definiciones que Dedekind.[70] Si al igual que Dedekind reformulamos las definiciones en el lenguaje de las aplicaciones, y por comodidad utilizamos la notación $\varphi(n) = n'$, obtenemos:

ADICION. $a+1 = a'$; $a+b' = (a+b)'$
MULTIPLICACION. $a{\cdot}1 = a$; $a{\cdot}b' = (a{\cdot}b)+a$
POTENCIACION. $a^1 = a$; $a^{b'} = a^b{\cdot}a$

Nos consta por una carta de Dedekind a Lipschitz escrita en julio de 1876 que no había leido el libro de Grassmann; por tanto, se trata de una coincidencia entre los dos matemáticos.[71] Y, de todos modos, Dedekind

[69] Cf. la edición del borrador en Dugac, o.c., apéndice LVI, y en concreto la pag. 295.

[70] *Lehrbuch der Arithmetik* (Berlin: Enslin, 1861), puntos 8-9, 15 (para la definición de adición), 52, 56-58 (multiplicación), 186-187 (potenciación). Grassmann entiende la matemática como "la ciencia de la conexión de magnitudes" (definición 1) y, aunque interpreta la noción de magnitud de manera abstracta, de ahí proviene el inconveniente de que la introducción de los irracionales no le plantee ningún reparo, porque supone intuitivamente un dominio de magnitudes continuo. A este respecto, pues, hay que alinear a Grassmann con los matemáticos 'tradicionales' y no con Dedekind, Cantor o Weierstrass.

[71] Cf. Rudolf Lipschitz, *Briefwechsel* (Braunschweig: Vieweg, 1986), 74. Dedekind tenía noticia del manual de Grassmann por el *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* (Leipzig: Teubner, 1873) de Schröder, que sigue a aquél con respecto a las definiciones

va mucho más allá: tras reformular la idea original en el lenguaje de las aplicaciones, concibiendo las operaciones aritméticas como aplicaciones de ℕ en ℕ que se definen sobre la base de la aplicación sucesor, Dedekind se plantea la demostración de un teorema general que justifique las definiciones recursivas. Esto constituye su principal contribución al contenido del libro en 1887, cuando redacta la versión final, y forma el tema del § 9.

Con ello el nivel de generalidad aumenta enormemente, y Dedekind muestra una vez más su genialidad. La estructura demostrativa del libro es perfecta: la definición de las operaciones aritméticas es una aplicación del teorema general de definición recursiva, que en conjunción con el teorema de inducción permite deducir todas las leyes de la aritmética. Y no sólo esto, sino que la propia utilización de los números para contar, es decir el paso a los números cardinales, queda justificada por el mismo teorema de recursión.

7.2. Con lo visto hasta aquí, quedará claro que **QSN** constituye el final de una era y el comienzo de otra. El libro se inscribe en la tradición de los manuales de aritmética, entre los que sus principales precedentes son *Tentativa de un sistema de la matemática perfectamente consecuente* (1822) de Ohm, y los manuales de Grassmann (1861) y Schröder (1873);[72] la perfección y la generalidad de la exposición de Dedekind hace que estos libros apenas resistan la comparación. Por otro lado, el fundamento sobre el que Dedekind basa su exposición es la teoría de conjuntos y aplicaciones, y con esto inaugura toda una serie de investigaciones sobre el tema. Para concluir este apartado indicaré algunas extensiones de las ideas y métodos de Dedekind empleadas posteriormente por los teóricos de conjuntos.

Para empezar, Ernst Zermelo tomó del § 1 del libro de Dedekind parte de los axiomas de la teoría de conjuntos que propuso en 1908; en particular, esto puede decirse de los axiomas I (extensionalidad), II (conjuntos elementales) y V (unión). Más interesante es el hecho de que

recursivas (Schröder es de hecho uno de los seguidores más importantes de Grassmann, incluso en su obra lógica). Pero está claro que las ideas de Dedekind estaban ya consolidadas antes de conocer la obra de Schröder.

72 Ya he dado las referencias de los libros de Grassmann y Schröder; *Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik*, 1ª y 2ª parte, apareció en 1822 en Berlin, y fue reformado en 1828-29, apareciendo nuevos tomos en los años siguientes. Cf. B. Bekemeier, *Martin Ohm (1792-1872)* (Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1987).

el axioma VII de Zermelo (infinito) "se debe esencialmente a Dedekind"; en efecto, pese a que la demostración de la existencia de conjuntos infinitos que da Dedekind sea inutilizable (luego hablaremos de ello), esto no debe oscurecer el hecho de que fue él quien por vez primera vio que la teoría debía basarse sobre una proposición de existencia como esa.[73] Por estos motivos no es extraño que, en el artículo citado, Zermelo se refiera a la teoría de conjuntos como "la teoría creada por Cantor y Dedekind".[74] Y ya que hablamos de axiomatizaciones, hay que mencionar que las condiciones del punto 71 de **QSN** equivalen a los axiomas de Peano, quien reconoce haber tenido ante sí la obra de Dedekind al escribir *Los principios de la aritmética.*[75]

Zermelo empleó también la noción de cadena para su segunda y definitiva demostración del teorema de buen orden, sobre la base del axioma de elección.[76] (A propósito de ésto, cabe decir que el teorema 159 de **QSN** se basa implícitamente en el axioma de elección, como indico con más detalle en una nota al texto.) Otro matemático que se ha apoyado en la noción de cadena es Kuratowski, con su método de eliminación de cardinales transfinitos.[77] La noción de cadena y el método de introducción de las operaciones utilizado por Dedekind se sigue empleando habitualmente en el desarrollo de la teoría de los números ordinales transfinitos. En conexión con esto, el teorema de definición recursiva fue generalizado por J. von Neumann empleando la inducción transfinita.[78]

Como vemos, los métodos empleados por Dedekind estaban elegidos de tal modo que resultaron fácilmente extensibles al caso transfinito. Aunque no podemos decir que Dedekind hubiera previsto los detalles

---

[73] Lo que hizo Zermelo fue postular la existencia de un 'conjunto simplemente infinito', es decir, de un conjunto que satisficiera las condiciones del punto 71 de **QSN** (salvo la que involucra la idea de 'cadena de un sistema'). Cf. la traducción inglesa de su artículo en J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel* (Cambridge/London: Harvard University Press, 1967), 199-215; los axiomas aparecen en las pp. 201-204, el texto citado en una nota a la p. 204.

[74] o.c., 200. Hay que decir que al editar los *Abhandlungen* de Cantor, en 1832, Zermelo cambió de opinión, o al menos se sumó a la tendencia más habitual, diciendo que la teoría en cuestión era fruto de la actividad creadora de un único individuo, Cantor.

[75] Cf. la edición bilingüe latín-español editada por Pentalfa (Oviedo) en 1979, o la traducción inglesa en van Heijenoort, o.c., 83-97.

[76] 'Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung', trad. inglesa en van Heijenoort, o.c., 183-198.

[77] 'Une méthode d'elimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques', *Fundamenta Mathematica* 3 (1922), 76-108.

[78] 'Über die Definition durch transfinite Induktion', *Mathematische Annalen*, 99 (1928), 373-391.

de este paso, ese hecho justifica una vez más la impresión de que Dedekind tuvo siempre en cuenta motivaciones más generales que las que desarrolla explícitamente en el trabajo. En particular, resulta claro que Dedekind quiso ofrecer un conjunto de ideas básicas que en su opinión bastaban para fundamentar también la teoría de conjuntos cantoriana. Una nota al punto 161 del libro ofrece una confirmación indirecta de ello: Dedekind dice que limita la noción de número cardinal al caso finito "por motivos de sencillez y precisión"; esto equivale a decir que en principio los mismos fundamentos bastan para la teoría de cardinales transfinitos.[79] Da la sensación de que en este punto Dedekind no aclaró todas las implicaciones de su teoría para evitar nombrar a Cantor, lo que le hubiera obligado a entrar en polémicas.

8. DEDEKIND Y EL LOGICISMO.

Adentrarse en el terreno de la lógica, sobre el que nunca había publicado, suponía un cierto atrevimiento por parte de Dedekind. Sin embargo, *¿Qué son y para qué sirven los números?* fue acogido con elogios por los mayores lógicos de la época. Frege se refirió al libro como "la obra más completa sobre los fundamentos de la matemática de la que he tenido noticia últimamente".[80] Ernst Schröder escribió:

> Cuando considero, por un lado, cuánto tenía que mejorarse el desarrollo del cálculo lógico para posibilitar el establecimiento de la conexión perdida [entre la lógica y la aritmética] de una manera realmente *concluyente*, y, por otro, la gran agudeza que ha necesitado Dedekind para llenar el hueco, no puedo reprenderme a mí mismo ni a ningún otro expositor de la aritmética [...] tanta mayor

[79] Que tuvo en cuenta a Cantor a propósito de la noción de cardinal queda claro por la redacción original del prólogo; al comentar que "algunas nociones que propiamente son muy complejas (como por ejemplo la de número [cardinal] de cosas) se consideran simples erróneamente" -pasaje que se conserva en el prólogo publicado- continúa: "(en oposición a Cantor)". Cf. Cod. Ms. Dedekind, III, 1, p. 41.

[80] Introducción a *Grundgesetze der Arithmetik* (Hildesheim: Olms, 1966). Frege, a quien ya hemos mencionado, es considerado habitualmente como el creador de la lógica actual, que aparece de una forma casi completa en su *Begriffschrift* (1879); en *Grundgesetze* depura sus ideas lógicas y desarrolla mediante ellas el programa logicista.

> admiración habrá de profesarse a la obra que creó la conexión que faltaba.[81]

Y en un artículo de Charles S. Peirce podemos leer:

> La línea fronteriza entre algunas partes de la lógica y la matemática pura en su tratamiento moderno es prácticamente evanescente, como puede verse en la obra de Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen*.[82]

Que Dedekind creyera que su obra estaba basada en la lógica puede resultar muy desconcertante al lector actual, pero más extraño es que Peirce y Schröder no tuvieran nada que objetar a este respecto. En cuanto a Frege, sí que tuvo -como casi siempre- algo que objetar, pero sus razones eran más epistemológicas que lógicas. Es bien conocida su preferencia por nociones intensionales: opinaba que los conjuntos sólo resultan aceptables cuando se conciben como 'extensiones de conceptos'; y en cuanto a la idea de aplicación o, como decía Dedekind, 'representación', dice:

> Si es correcta mi idea de que la aritmética es una rama de la lógica, entonces habrá que elegir, en vez de 'representación', una expresión puramente lógica. Y escojo la de 'relación'. Concepto y relación son las piedras fundamentales sobre las que construyo mi edificio.[83]

Ahora bien, prescindiendo de las preferencias epistemológicas o quizá ontológicas de Frege, la cita anterior viene en realidad a confirmar que

---

[81] Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (New York: Chelsea, 1966), vol.3, 349; aquí reconoce la inferioridad de su manual de 1873 que citábamos en una nota anterior. Schröder fue uno de los principales representantes de la corriente denominada 'álgebra de la lógica', que nace en la obra de Boole *El análisis matemático de la lógica* (1847). Desarrolló especialmente la lógica de relaciones, y sistematizó las ideas del álgebra de la lógica en sus monumentales *Vorlesungen*; en el tercer tomo retomó la teoría de aplicaciones de Dedekind, y especialmente la teoría de cadenas.

[82] 'Lógica' (1901) en *Escritos lógicos* (Madrid: Alianza, 1986), 248. Peirce merece ser citado junto a Frege como primer introductor del cálculo proposicional y de los cuantificadores en lógica. Por tanto, la lógica de primer orden actual tiene su origen en ambos, si bien las exposiciones de Peirce dejan mucho que desear en cuanto a claridad y sistematicidad en comparación con las de Frege. Peirce es también muy conocido por su contribución a la lógica de relaciones y al nacimiento de la semiótica.

[83] Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, 161.

las nociones elegidas por Dedekind son puramente lógicas. La noción de concepto fregeana no es más que el correlato de la de conjunto, y la de relación es una extensión -habitual entre los lógicos del momento- de la de aplicación. ¡El propio Frege nos está diciendo que su teoría tiene esencialmente la misma base que la de Dedekind!

Lo dicho hasta aquí puede resultar sorprendente. Hoy en día entendemos por lógica (clásica) la teoría formal de las conectivas proposicionales (que corresponden aproximadamente a las partículas 'si ... entonces', 'y', 'no', etc.) y de los cuantificadores ('todo', 'al menos un'). Pero en el libro de Dedekind no se encuentra nada que corresponda a esto, o, mejor dicho, se emplean esas partículas de modo sistemático pero informal. Lo que Dedekind entiende por lógica es otra cosa: es la teoría de conjuntos y aplicaciones, y esto separa radicalmente su concepción del asunto de la nuestra. Pero el punto de vista de Dedekind es el de su época, como acreditan las declaraciones anteriores, y se basa en una larga tradición. Los cambios en la comprensión de la lógica comienzan ya con Frege y Peirce, pero se radicalizan con el descubrimiento de las antinomias, que fue la causa del divorcio entre lógica y teoría de conjuntos. Por este motivo, no están de más unos cuantos comentarios sobre el concepto decimonónico de lógica.

8.1. El § 1 del segundo borrador de **QSN**, escrito en junio de 1887, se titula "Sistemas de elementos (Lógica)" -en la versión definitiva sólo falta el paréntesis-, y la palabra "sistema" es el término técnico introducido por Dedekind para referirse a conjuntos. Así pues, ese título nos viene a decir que la lógica es la teoría de 'sistemas' o conjuntos. En efecto, los conjuntos no parecían ser otra cosa que las clases lógicas, que venían siendo objetos típicos de la lógica matemática. Basta pensar que en la segunda mitad del siglo XIX la corriente más difundida fue la de los seguidores de Boole, conocida por el nombre de 'álgebra de la lógica', pero también por el de 'lógica de clases'.

Las clases derivaban su posición privilegiada en la lógica del papel central que tenían los conceptos, y la historia de ésto último puede retrotraerse al creador de la teoría lógica, Aristóteles. Durante toda la Edad Moderna se aceptó el análisis tradicional del razonamiento, según el cual toda deducción lógica puede reducirse a un encadenamiento silogístico de juicios (proposiciones afirmadas o negadas), y todo juicio puede reducirse a una relación copulativa entre dos conceptos ('Todo A es B', 'Algún A es B', y sus negaciones). De acuerdo con este análisis, el contenido no lógico de un razonamiento se resume en los conceptos que en él intervienen. Ahora bien, ya en el siglo XVII Arnauld y Nicole, al escribir el que se considera el principal manual de aquel tiempo, la

Lógica o el Arte de Pensar (1662), indicaron que podemos considerar los conceptos o ideas bajo dos aspectos:

> Entendemos por *comprehensión* de la idea los atributos que encierra en sí y que no pueden retirarse sin destruir tal idea, como es el caso de la comprehensión de la idea del triángulo, que encierra en sí la extensión, figura, tres líneas, tres ángulos, igualdad de estos ángulos sumados a dos rectos, etcétera.
> Entendemos por *extensión* de la idea los sujetos a los cuales esta idea conviene [...]; así, la idea general de un triángulo contiene en su extensión triángulos de todas las diversas especies.[84]

Hoy en día se suelen emplear los términos 'intensión' y 'extensión' para ambas facetas. Por tanto, cada vez que mencionamos una propiedad, un predicado, esto es, un concepto, estamos delimitando la clase de aquellas cosas que 'satisfacen' o 'convienen' a dicho concepto. Es lo que se llama el *principio de comprehensión*, y de ahí que a la centralidad de los conceptos corresponda la de las clases.

El interés de los lógicos de Port-Royal en destacar la noción de extensión derivaba de que su empleo permitía justificar a modo semiformal las formas deductivas de la silogística. Los intentos de obtener un álgebra de la lógica, que culminaron en Boole, se basaron en esa idea: es posible un estudio abstracto, formal, y por tanto lógico-matemático, de las relaciones entre clases. La importancia de todo ese planteamiento para la historia de la lógica quedará suficientemente establecida citando al propio George Boole, creador de la lógica matemática:

> Lo que hace posible la Lógica es la existencia en nuestras mentes de nociones generales -nuestra capacidad de concebir una clase y designar a sus miembros individuales por un nombre común.[85]

Vemos que las clases siguen manteniendo, para Boole, el papel central que les corresponde como extensiones de conceptos o 'nociones generales'. Y aunque los lógicos posteriores (Peirce, Frege, Schröder) consideraron que había que hacer un hueco a las conectivas

---

84 o.c. (Madrid: Alfaguara, 1987), 80, con ligeras correcciones nuestras.
85 *El análisis matemático de la lógica* (Madrid: Cátedra, 1984), 42.

proposicionales, los cuantificadores y las relaciones, no por ello negaron el carácter puramente lógico de los conjuntos. A este respecto, pues, la confianza de Dedekind estaba plenamente justificada.

Con respecto a la noción de aplicación el asunto era más delicado, debido precisamente al hecho de que la lógica venía centrándose demasiado unilateralmente en los conceptos y sus extensiones. Dedekind aborda el tema afirmando que el pensamiento no es posible sin "la facultad mental de relacionar cosas con cosas, hacer corresponder una cosa a otra cosa, o representar una cosa mediante otra". Posiblemente consideraba que no podemos pensar sin establecer una correlación entre, pongamos por caso, nuestros pensamientos y lo pensado, o entre nuestras palabras y sus objetos. Más aun, si nos remitimos a la teoría silogística, la conexión copulativa mediante la cual se unen dos conceptos para formar un juicio parece ejercerse gracias a la facultad mental invocada por Dedekind. En cualquier caso, Frege y Schröder aceptaron el carácter lógico de las aplicaciones, considerándolas como un tipo particular de relación. De este modo, gracias al desarrollo de la lógica de relaciones, la propuesta de Dedekind encontró un terreno bien abonado para su aceptación.

Por todo lo anterior vemos que Dedekind tenía buenas razones, dado el contexto de la época, para entender que su reconstrucción de la matemática pura equivalía a hacer de ella una parte de la lógica. En cuanto al modo en que llegó a esta radical conclusión, ya he indicado antes que en mi opinión el camino pasó por la construcción de los números reales. Lo que era un axioma clave de la geometría (en el sentido clásico de proposición indemostrable pero evidente, como vimos con declaraciones de Cantor y Dedekind), podía obtenerse en aritmética mediante una simple construcción conjuntista, esto es, por lo que entonces se consideraban medios lógicos. Salvado ese obstáculo clave, resultaba posible que toda la aritmética no fuera más que lógica.

El programa era ahora eliminar todo axioma, desarrollar la aritmética como una serie de consecuencias extraídas de simples definiciones lógicas. Este ideal explica la propia estructura demostrativa de **QSN**, donde es notable la ausencia total de un sistema axiomático. A propósito del cálculo lógico, Schröder reconoció la legitimidad de ese tipo de estructura a base de proposiciones deducidas de simples definiciones, lo que justifica la estructuración seguida por Dedekind:

> Todos los teoremas de nuestra disciplina [la lógica] son *intuitivos*; resultan inmediatamente evidentes tan pronto como son traídos a la conciencia, y por ello podríamos

> también establecer las afirmaciones introducidas aquí como axiomas, con cierto derecho, como consecuencias que vienen dadas inmediatamente por las definiciones.[86]

La exigencia de rigor demostrativo total establecida por Dedekind se concreta de este modo en una estructuración diferente a la de nuestros sistemas axiomáticos, pero aun así prepara el camino hacia ellos. Dedekind rechaza las definiciones intuitivas o 'fenomenológicas' al estilo euclídeo, y sólo acepta definiciones que puedan servir como base de auténticas demostraciones. La teoría final debe ser suficiente para todos los resultados deseados, lo que exige el establecimiento claro y riguroso de todas las hipótesis implicadas, y la deducción de todos y cada uno de los pasos intermedios. Incluso encontramos frases de Dedekind que son claros precedentes de la famosa propuesta hilbertiana, de que la geometría debe poder hablar de mesas, sillas y vasos allí donde hablamos de puntos, rectas y planos (véase el final de la carta a Lipschitz del 27.07. 1876).

8.2. La filosofía de la matemática más extendida en Alemania a principios del XIX, fuertemente influída por Kant, defendía la 'intuitividad' de todo conocimiento matemático: se consideraba que los axiomas estarían asociados a algún tipo de intuición, fuente de su evidencia.[87] La nueva posición logicista se entiende quizá de la mejor manera si se ve como una respuesta a este tipo de posiciones, una denegación radical de la intuitividad de la matemática. Esto resultaba coherente con las nuevas tendencias tanto en análisis como en geometría y álgebra: la orientación de la matemática decimonónica hacia la abstracción.

Por tanto, el logicismo tuvo sentido dentro de una determinada interpretación de la lógica, y como reacción a la tesis de la intuitividad de la matemática; fue un movimiento a favor del rigor, de la estructuración demostrativa radical, y de la abstracción. Pero su edad dorada no iba a durar demasiado. Desde finales de los años 1890, Cantor, Zermelo y Russell descubren una serie de hechos paradójicos que se derivan de

---

86 Schröder, *Der Operationskreis des Logikkalkuls* (Stuttgart: Teubner, 1966), pag. 4.

87 Las ideas de Hamilton deben verse a esta luz: así como la geometría tiene su origen en la intuición espacial, el álgebra se origina en la intuición temporal. Las referencias a 'magnitudes' involucraban la idea de que la matemática depende de nuestro acceso a cierto tipo de objetos, que existen en la realidad o al menos en la intuición.

manejar, de un modo u otro, nociones relacionadas con la de 'conjunto de todos los conjuntos'. De estas antinomias, la más famosa es la de Russell –al parecer descubierta independientemente por Zermelo–, notable por formularse en términos de las nociones más elementales de la teoría de conjuntos: 'conjunto' y 'elemento'.

La mayoría de los conjuntos no son elementos de sí mismos, pero si existiera el 'conjunto de todos los conjuntos' tendríamos un ejemplo de conjunto que pertenece a sí mismo. Consideremos el 'conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos', y llamémoslo **R**; ¿hemos de decir que **R** pertenece a sí mismo, o que no? La paradoja está en que si **R** pertenece a sí mismo, deberá cumplir la condición mediante la que hemos definido **R**, esto es, no pertenecerá a sí mismo; pero si no pertenece a sí mismo, cumple la condición definitoria, de modo que será un elemento de **R**. Contradicción.

La antinomia de Russell tuvo un efecto directamente destructivo para la teoría fregeana de la aritmética, dado que Frege había introducido un axioma (su Ley Fundamental V) que autorizaba a pasar de un concepto a la clase correspondiente: el principio de comprehensión. Y el ejemplo de concepto dado por Russell, 'conjunto que no pertenece a sí mismo', no podía ser más simple. La relación entre la antinomia y la teoría de Dedekind es algo más compleja, ya que Dedekind no introdujo ningún supuesto fuerte como el de Frege, pero de todas formas sus sucesores consideraron insegura su teoría. En primer lugar, hay que decir que las antinomias tuvieron el efecto de producir inseguridad: necesitamos saber qué conjuntos son admisibles y cuáles no, porque de otro modo podrían esperarnos nuevas antinomias a la vuelta de la esquina, como quien dice. Como la teoría de Dedekind no decía nada a este respecto, es natural que Hilbert y Zermelo la vieran con desconfianza. Pero el argumento que usaron para descartarla fue más directo: aludieron a la demostración de existencia de conjuntos infinitos, el teorema 66 de **QSN**.

El teorema 66 de Dedekind es justamente célebre. En primer lugar, supone el reconocimiento de que es necesario establecer explícitamente la existencia de conjuntos infinitos. En segundo lugar, llevando el logicismo hasta sus últimas consecuencias, trata de ofrecer una demostración puramente lógica de esa existencia, que es muy interesante desde el punto de vista filosófico. En tercer lugar, como nos recuerda la carta a Keferstein, la pretensión última del argumento es justificar nuestra suposición de la existencia de conjuntos infinitos probando que esa noción no encierra contradicción alguna.

Dedekind comienza hablando de "mi universo mental, es decir, la totalidad *S* de todas las cosas que pueden ser objeto de mi pensamiento";

recordemos que todo conjunto es una cosa, de manera que *S* contiene todos los conjuntos que pueden ser objeto de mi pensamiento. Dedekind pretende probar que *S* es infinito, y para ello va a aplicar su definición de infinito (un conjunto *C* es infinito si y sólo si existe una aplicación biyectiva de *C* en una parte propia de *C*). Sea *s* un pensamiento posible; su imagen *f(s)* será el pensamiento '*s* puede ser objeto de mi pensamiento'. Dedekind demuestra que *f* es una aplicación biyectiva indicando que dos proposiciones con distinto sujeto son distintas entre sí;[88] tras ello muestra un elemento de *S* que no tiene la forma *f(s)*, concretamente 'mi propio yo'. Con esto queda demostrado lo que queríamos: *f* es una aplicación biyectiva de *S*, y *f(S)* es parte propia de *S* ya que 'mi propio yo' no es elemento de *f(S)*.[89]

Seguro que esta 'demostración' provocará en cualquier matemático actual una gran desconfianza. Algunos han llegado a decir que se trataría de una demostración de psicología y no de matemática; con ello demuestran más bien su falta de sensibilidad filosófica, junto con su escaso conocimiento del sentido del logicismo en la época. Desde el punto de vista de la epistemología del momento, que a este respecto coincide con la de Kant, la demostración anterior podría considerarse puramente lógica. Además llama la atención el cuidado con que Dedekind ha elegido la aplicación (en la que se debe resaltar el matiz modal de la palabra '*puede*') y el objeto base. Podemos argumentar además que quien se contenta con un axioma de infinito habitualmente lo hace por razones pragmáticas, y rebaja las exigencias en cuanto a fundamentación con respecto al nivel exigido por Dedekind: no toma en serio el problema de que sin una demostración de consistencia, "permanecerá siempre dudoso si la noción de un tal sistema [infinito] no contendrá quizá contradicciones internas" (carta a Keferstein, punto 7).

Pero el caso es que el conjunto *S* en que se basa Dedekind, 'mi universo mental', es sospechoso de contener el conjunto de todos los conjuntos; este fue el punto capital por donde las antinomias minaron el sistema de Dedekind. Por otro lado, aunque en **QSN** Dedekind formula su teoría de manera abstracta, sin hacer asunciones sobre cómo se forman los conjuntos, es seguro que durante la mayor parte de su vida confió en la transición 'lógica' de conceptos a conjuntos, de manera que sus convicciones fueron fuertemente sacudidas por las antinomias. Sólo

---

88 Recordemos que las nociones de sujeto y proposición pertenecen a la lógica tradicional tanto como la lógica de clases.

89 La *f*-cadena de 'mi propio yo' nos da además un modelo de 'sistema simplemente infinito', es decir, un modelo de los números naturales.

un punto de **QSN** nos recuerda la relación clase-concepto o clase-propiedad: las dos formulaciones alternativas del teorema de inducción completa (puntos 59 y 60 del texto). Pero hay muchos otros datos que lo confirman. En 1876, el propio Dedekind dio una reconstrucción racional de cómo llegó a la teoría de ideales en términos del paso de determinadas propiedades a las clases asociadas[90]. En 1887, escribiendo el segundo borrador de **QSN**, nos ofrece algunas confirmaciones más, por ejemplo la siguiente:

> Un sistema puede consistir en *un* elemento, puede también (contradicción) ser *vacío* (no contener ningún elemento).[91]

O lo que escribe a propósito de la unión de conjuntos:

> Ampliación (del concepto) en contraposición a restricción.

Dado que Dedekind creía que el paso de un concepto al conjunto asociado es siempre válido, las antinomias iban a estar directamente en contra de sus convicciones.

8.3. Al parecer, Dedekind conoció las antinomias a través de una comunicación de Cantor hecha en 1899; como escribe éste en una carta a Hilbert del 15.11.1899,

> Este fundamento [de la teoría de conjuntos desde el punto de vista de Cantor] está en *contraposición diametral* con el punto clave de sus investigaciones [de Dedekind], que se encuentra en el supuesto ingenuo de *que todas las colecciones bien definidas, o sistemas*, son siempre *«sistemas consistentes»*.
> *Se ha convencido usted, pues, de que esta suposición de Dedekind* es *errónea*, cosa que yo, naturalmente, vi *inmediatamente después de la aparición* de la primera edición

90 Cf. mi 'Traditional Logic and the Early History of Sets, 1854-1908', *Archive for History of Exact Sciences* **50** (1996), 5-71.

91 Al margen anota: "preferible excluir totalmente los sistemas *vacíos*." Desgraciadamente no conocemos las razones de esa decisión, pero este texto concuerda con el final del punto 2 de **QSN**, y sale al paso de las críticas realizadas por Frege en el sentido de que Dedekind habría sido incapaz de concebir el conjunto vacío. Naturalmente que fue capaz, y lo hizo exactamente en los mismos términos que Frege: como la clase asociada a un concepto contradictorio.

> de su escrito antes citado [QSN], año 1887. Pero por supuesto no quería publicar en contra de un hombre de tan grandes méritos en teoría de números y álgebra, antes bien esperé a que hubiera una oportunidad de comentar con él la cuestión, *¡para que él mismo realizara y publicara las necesarias correcciones en sus investigaciones*!
> *Sólo en este otoño* obtuve la oportunidad de hacerlo, ya que [...][92]

Este texto de Cantor contiene diversos elementos dudosos, entre otros la idea de que ya en 1887 hubiera conocido las antinomias, aunque quizá las intuyó de alguna forma. Además, los motivos de la amabilidad de Cantor no fueron tan puros como la cita puede hacer pensar; la carta empieza diciendo que la redacción final de un artículo, que nunca llegó a publicarse, dependía de la contestación de Dedekind, y dice: "¡Comprenderá usted qué valor debo conceder a sus declaraciones!".

En cualquier caso, está claro que Cantor fue más agudo que Dedekind a propósito del tema de las antinomias. Mientras éste apenas supo reaccionar planteándose los temas discutidos en el fragmento 'Peligros de la teoría de sistemas', y con el tercer prólogo a **QSN**, Cantor supo ver el carácter antinómico del conjunto de todos los alefs y el de todos los ordinales, e intentó explotarlos para demostrar el teorema de buen orden. Es interesante advertir, como hacen Purkert e Ilgauds (*o.c.*), que sus opiniones teológicas le llevaban a esperar que se encontraría alguna contradicción a propósito de conjuntos demasiado grandes: sólo Dios es el infinito absoluto, y todo conjunto transfinito está tan lejos de él como lo finito de lo infinito.

Por pura casualidad existe un testimonio de Dedekind que se refiere a su entrevista con Cantor. En la sección de notas necrológicas del calendario matemático de Teubner (año 1904), se anunció que Dedekind había muerto el 4.09.1899. Dedekind escribió al editor diciéndole que quizá acertaran con el dia y el mes de su muerte, pero con el año seguro que no:

> Según mis propias notas, pasé ese dia con toda salud y en estimulante conversación sobre sistema y teoría con mi

[92] Tomado de W. Purkert, H. J. Ilgauds, *Georg Cantor, 1845-1918* (Basel: Birkhäuser, 1987), 154. A continuación aparece el texto citado hacia el final del apartado 6 de esta introducción.

> invitado a comer y estimado amigo Georg Cantor (de Halle), quien en esta ocasión asestó el golpe de muerte no a mi mismo, sino más bien a un error mío.[93]

No caben muchas dudas de que ese error era ni más ni menos que la adhesión a enfoques relacionados de un modo u otro con el principio de comprehensión, y que sugerían –como dice Cantor– que todo conjunto bien definido es consistente.

La reacción última de Dedekind al problema de las antinomias puede leerse en el tercer prólogo de su libro, escrito seis dias antes de cumplir la respetable cifra de 80 años. En este texto da el interesante paso de identificar la "facultad creativa de la mente", en la que siempre había creído, con la capacidad de "formar a partir de determinados elementos una nueva cosa determinada, su sistema, necesariamente distinto de cada uno de esos elementos". La restricción de la facultad creativa a algo tan concreto no tiene precedente en sus escritos, e incluso contradice la manera en que se habla de 'creación' en *Continuidad y números irracionales* (aquí, como también en la carta de 1888 a Weber, parece suponerse la capacidad de crear *elementos* y no sólo conjuntos). Dado que lo que se discute en el tercer prólogo es el problema de cómo determinar qué conjuntos son accesibles y cuáles no, parecería que el cambio de postura se debió a la pérdida de confianza en el paso de los conceptos a sus conjuntos asociados. Olvidado esto, sólo quedaba confiar en el procedimiento de construcción que Dedekind había empleado una y otra vez, siempre con buenos resultados.

De esta manera, Dedekind parece abogar finalmente por algo que está en la línea de la concepción iterativa de los conjuntos.[94] Es especialmente interesante notar que por entonces Dedekind conocía desde tiempo atrás el enfoque axiomático de Zermelo, quien le envió una copia de su famoso artículo de 1908.[95] Su teoría era recuperable dentro del marco de Zermelo, pero Dedekind no lo reconoció así en el tercer prólogo. Probablemente el enfoque axiomático estilo Hilbert le resultaba algo

---

[93] Cit. por E. Landau, 'Richard Dedekind-Gedächtnisrede', *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1917), 54.

[94] Sobre la concepción iterativa cf. diversos artículos recogidos, en P. Benacerraf y H. Putnam, *Philosophy of Mathematics: Selected readings* (Cambridge University Press, 1983), 530-570.

[95] Cf. V. Peckhaus, 'Ernst Zermelo in Göttingen', *History and Philosophy of Logic* **11** (1990), 35 y 31.

extraño, pero sobre todo es plausible que considerara que en el proceso se perdía la generalidad abstracta de sus formulaciones y se contradecía el espíritu de su logicismo. En particular, el recurso de Zermelo a un axioma de infinito, por más que se inspirara directamente en **QSN**, debía parecerle a Dedekind un reconocimiento explícito del carácter no-lógico de esa proposición (véase más arriba).

BIBLIOGRAFIA COMENTADA.

La bibliografía en castellano sobre temas relacionados con el de este libro es breve; los principales títulos son los siguientes:

FERREIRÓS, J. *El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854-1908*. Madrid: Publicaciones de la Universidad Autónoma, 1993.

Un estudio que trata de ser exhaustivo acerca del surgimiento de la noción de conjunto en la matemática alemana de finales del siglo XIX, y del desarrollo de la teoría abstracta de conjuntos y su difusión. Centrado en Riemann, Dedekind, Cantor y Zermelo.

GARCIADIEGO, A. *Bertrand Russell y los orígenes de las paradojas de la teoría de conjuntos*. Madrid: Alianza, 1992.

Examina de manera detallada y crítica el episodio clave del surgimiento de las paradojas, que según hemos defendido aquí vino a cambiar las relaciones entre lógica y teoría de conjuntos.

LORENZO, J. de. *Las matemáticas y el problema de su historia*. Madrid: Tecnos, 1977.

Incluye material acerca del desarrollo de la teoría de conjuntos.

Existe una amplia bibliografía en otros idiomas; en lo que sigue trato de dar títulos en francés e inglés. En relación con Dedekind conviene consultar:

CAVAILLÈS, J. 'Correspondance Cantor-Dedekind' (traducción francesa), en *Philosophie mathématique* (Paris: Hermann, 1962), 187-249.

Contiene la parte matemática de la correspondencia incluyendo las cartas de 1899 publicadas por Zermelo. El resto de la correspondencia se encuentra, en versión alemana, en el libro de Dugac.

DUGAC, P. *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques (avec de nombreux textes inédits)*. París: Vrin, 1976.

Libro muy importante para el estudioso de Dedekind por la cantidad de inéditos que contiene; algo menos fiable en la parte debida al propio Dugac.

NEUMANN, O. y PURKERT, W. 'Richard Dedekind–zum 150 Geburtstag', *Mitteilungen der Mathematische Gesellschaft der DDR* 2 (1981) 4, 84-110.

Buen resumen de la vida y obra de Dedekind publicado con ocasión del aniversario de su nacimiento.

SCHARLAU, W. *Richard Dedekind 1831/1981. Eine Würdigung zu seinem 150. Geburtstag*. Braunschweig: Vieweg, 1981.

Otro resultado del aniversario del nacimiento de Dedekind; contiene interesantes datos nuevos sobre sus años en Göttingen, pero no presenta el carácter sistemático del artículo anterior y el libro de Dugac.

Trabajos originales de otros autores del siglo XIX, que contribuyeron al desarrollo de temas íntimamente relacionados con la obra de Dedekind:

BOLZANO, B. *Paradoxes of the Infinite*. Londres: Routledge & Kegan, 1950. Trad. en México: UNAM, 1991.

Primer libro que trató temas de teoría de conjuntos con cierto rigor; no influyó directamente en Cantor ni en Dedekind, salvo en lo que respecta al teorema de infinito de éste (QSN.66).

CANTOR, G. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. Nueva York: Dover, 1955.

Versión inglesa de dos artículos publicados por Cantor en 1895 y 1897, que resumían su trabajo en teoría de conjuntos. Los trabajos fundamentales de 1874-84 deben verse en sus *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts* (Hildesheim: Olms, 1966).

FREGE, G. *Los fundamentos de la aritmética*. Barcelona: Laia, 1972. Reeditado en *Escritos filosóficos,* Barcelona: Crítica, 1996.

Contrapartida de *¿Qué son y para qué sirven los números?*, escrita desde un punto de vista filosófico y matemático muy distinto. Tuvo gran influencia a principios de nuestro siglo.

Finalmente, mencionaremos otros títulos de interés en relación con la teoría de conjuntos:

DAUBEN, J. W. 'El desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana', en I. Grattan-Guinness (ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910* (Madrid: Alianza, 1984), 235-282.

Artículo de uno de los principales expertos en la obra de Cantor.

HEIJENOORT, J. van. *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967.

Recopilación muy completa de trabajos sobre lógica y teoría de conjuntos. Encontramos a Dedekind, Cantor, Frege, Peano, y a los principales axiomatizadores de la teoría de conjuntos.

FRAENKEL, A., BAR-HILLEL, Y., LEVY, A. *Foundations of Set Theory*. Amsterdam: North-Holland, 1973.

Tratamiento discursivo pero muy riguroso de los distintos enfoques sobre la fundamentación de la teoría de conjuntos.

LEVY, A. *Basic Set Theory*. Nueva York: Springer-Verlag, 1979.

Uno de los principales manuales de teoría de conjuntos. No tan básico como quiere el título.

NOTA A LA PRESENTE EDICIÓN.

Los dos textos fundamentales de Dedekind se presentan en orden cronológico, mientras que la secuencia de los fragmentos responde más bien a razones temáticas. En todo caso, existen básicamente dos maneras de leer el conjunto del material.

El lector que desee obtener una visión histórica de la evolución del planteamiento de Dedekind habría de seguir un orden cronológico estricto: primero el artículo de 1872, seguido del fragmento 4, luego el libro de 1888, el fragmento 3, el 2 y el 1; la inserción de las cartas en este orden cronológico es fácil de establecer.

Si por el contrario el lector desea obtener una visión sistemática de la construcción del sistema numérico, y especialmente en caso de que no tenga conocimientos matemáticos previos sobre análisis, sería preferible que siguiera un orden temático: primero el libro de 1888, luego el fragmento 1, el artículo de 1872 y el fragmento 4; los fragmentos 2 y 3 caen fuera del problema específico de la construcción de los números, aunque contienen adiciones importante a los textos de 1872 y 1888.

A continuación indico las fuentes de las que tomamos los textos traducidos. Gran parte del material se toma de las *Gesammelte mathematische Werke* de Dedekind, tomo 3, en la reimpresión publicada en Nueva York por Chelsea Publishing Co., 1969. Los inéditos (en alemán) que traducimos aquí se conservan en la *Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung*, bajo la signatura *Cod. Ms. Dedekind*; indico el número de referencia y las páginas de cada uno.

* *Stetigkeit und irrationale Zahlen* [Continuidad y números irracionales] se toma de las pags. 315-334 de *Werke*.

* *Was sind und was sollen die Zahlen?* [¿Qué son y para qué sirven los números?] se toma de *Werke*, pags. 335-390.

* *Die Erweiterung des Zahlbegriffs auf Grund der Reihe der natürlichen Zahlen* [La extensión del concepto de número sobre la base de la serie de los números naturales] es traducción del manuscrito Cod. Ms. Dedekind, III.2, pags. 2-8.

* *Gefahren der Systemlehre* [Peligros de la teoría de conjuntos], se conserva en Cod. Ms. Dedekind, III.1, V, pags. 83-85.

* *Ähnliche (deutliche) Abbildung und ähnliche Systeme. 1887.7.11* [Representación similar (clara) y sistemas similares. 11.7.1887] se encuentra en *Werke*, pags. 447-448.

* *Allgemeine Sätze über Räume* [Teoremas generales sobre espacios] se toma del tomo 2º de *Werke*, pags. 353-355.

* La *correspondencia con Lipschitz* se toma de Rudolf Lipschitz, *Briefwechsel*, editado por W. Scharlau para la Deutsche Mathematiker-Vereinigung (Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg & Sohn, 1986); la correspondencia completa aparece en las pags. 47-101.

* La *correspondencia con Weber* no ha sido publicada íntegramente; los fragmentos traducidos se toman de *Werke*, tomo 3, 483-490, y de Dugac, *Dedekind et les fondements des mathématiques* (Paris: Vrin, 1976), apéndice L, pags. 272-273.

* La *correspondencia con Keferstein* no ha sido publicada en alemán; por este motivo la traducción se basa en un borrador conservado en Cod. Ms. Dedekind, XIII, pags. 17-22.

Continuidad y números irracionales

Contenido

CONTINUIDAD Y NÚMEROS IRRACIONALES

Prólogo

Las consideraciones que constituyen el objeto de este pequeño escrito proceden del otoño de 1858. Me encontraba entonces por vez primera, como profesor del Politécnico confederado de Zürich, en la situación de tener que exponer los elementos del cálculo diferencial, y al hacerlo sentí más claramente que nunca la carencia de una fundamentación verdaderamente científica de la aritmética. En la noción de aproximación de una magnitud variable a un valor límite fijo, y especialmente en la demostración del teorema que establece que toda magnitud que crece constantemente, pero no más allá de todo límite, se aproxima a un valor límite, tuve que apoyarme en evidencias geométricas. Aun hoy considero extraordinariamente útil, desde el punto de vista didáctico, ese recurso a la intuición geométrica en una primera enseñanza del cálculo diferencial; me parece incluso indispensable si no se quiere perder un tiempo excesivo. Pero nadie negará que ese tipo de introducción en el cálculo diferencial no puede tener ninguna pretensión de cientificidad. El sentimiento de insatisfacción era para mí tan aplastante, que tomé la firme determinación de reflexionar tanto como fuera necesario hasta encontrar una fundamentación puramente aritmética y totalmente científica de los principios del cálculo infinitesimal. Se dice tan a menudo que el cálculo diferencial se ocupa de las magnitudes continuas, y sin embargo nunca se da una definición de esa continuidad, e incluso las exposiciones más rigurosas del cálculo diferencial no basan sus demostraciones en la continuidad, sino que apelan con mayor o menor consciencia a representaciones que son geométricas o bien motivadas por la geometría, o se apoyan en teoremas que no han sido nunca demostrados de forma puramente aritmética. Entre estos se encuentra por ejemplo el mencionado antes, y una investigación más precisa me convenció de que aquel teorema o cualquier otro equivalente podía considerarse ciertamente como fundamento suficiente para el análisis infinitesimal. Ya sólo se trataba de descubrir su auténtico origen en los elementos de la aritmética, alcanzando simultáneamente una verdadera definición de la esencia de la

continuidad. Lo conseguí el 24 de noviembre de 1858, y pocos dias después comuniqué el resultado de mis reflexiones a mi querido amigo Durège,[1] lo que nos condujo a una larga y animada conversación. Posteriormente he contado estos pensamientos sobre la fundamentación verdaderamente científica de la aritmética a alguno que otro de mis alumnos, y también he dado una conferencia sobre este tema aquí en Braunschweig, ante la sociedad científica de profesores; pero no podía decidirme a una auténtica publicación porque en primer lugar la exposición no es muy fácil, y además el asunto es muy poco fructífero. Entretanto ya había pensado en elegir este tema como objeto de este escrito de homenaje, cuando hace pocos días, el 14 de marzo, llegó a mis manos, gracias a la bondad de su estimado autor, el tratado 'Die Elemente der Funktionenlehre' de E. Heine (*Crelles Journal,* tomo 74),[2] y me reafirmó en mi decisión. En lo fundamental coincido totalmente con el contenido de ese escrito, como no podía ser menos, pero quiero confesar sinceramente que mi exposición me parece más simple por su forma, y creo que resalta con más precisión el auténtico punto clave. Y mientras escribo este prólogo (20 de marzo de 1872) recibo el interesante tratado 'Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen' de G. Cantor (*Math. Annalen* de Clebsch y Neumann, tomo 5),[3] por lo cual doy mis más sinceras gracias al agudo autor. Según encuentro en una lectura rápida, el axioma del § 2 del mismo, al margen de la forma externa en que viene expresado, coincide totalmente con el que designo como la esencia de la continuidad en el § 3. No estoy aun en condiciones de juzgar, desde mi concepción del dominio completo en sí mismo de los números reales, qué utilidad pueda tener la distinción meramente conceptual de magnitudes reales de tipos superiores.

§1.
Propiedades de los números racionales.

Aunque aquí presupondremos el desarrollo de la aritmética de los números racionales, me parece conveniente resaltar algunos de los momentos principales sin entrar en detalles, simplemente para indicar de antemano el punto de vista al que me atendré en lo sucesivo. Veo toda la aritmética como una consecuencia necesaria o al menos natural del acto aritmético más sencillo, contar, y contar no es nada más que la creación sucesiva de la serie infinita de los números enteros positivos, en la que cada individuo viene definido mediante el inmediatamente precedente; el acto más simple es el paso de un individuo ya creado a su sucesor que está por crear. La cadena de estos números constituye

en sí misma un medio extremadamente útil para el espíritu humano, y ofrece una inagotable riqueza de leyes notables que se alcanzan mediante la introducción de las cuatro operaciones aritméticas básicas. La adición es la reunión en un solo acto de una repetición cualquiera del acto más simple indicado anteriormente, y de ella surge de la misma forma la multiplicación. Mientras ambas operaciones son siempre ejecutables, las operaciones inversas, sustracción y división, sólo son limitadamente admisibles. No entraremos aquí en la motivación inmediata, las comparaciones o analogías con experiencias e intuiciones que hayan conducido a ello; basta saber que esa limitación en la posibilidad de realizar las operaciones indirectas es precisamente, en cada caso, la verdadera causa de un nuevo acto creativo; así los números negativos y quebrados han sido creados por la mente humana, y con el sistema de todos los números racionales se ha ganado un instrumento de completud infinitamente mayor. Este sistema, que quiero designar con ***R***, posee ante todo una autonomía y un cierre que en otro lugar* he designado como característicos de un *cuerpo de números*, y que consisten en que las cuatro operaciones básicas son siempre ejecutables con dos individuos cualesquiera, es decir, que el resultado de las mismas es siempre un determinado individuo de ***R*** si excluimos un único caso, la división por el número cero.

Pero para nuestro objeto inmediato es aun más importante otra propiedad del sistema ***R*** que se puede expresar diciendo que el sistema ***R*** constituye un dominio unidimensional bien ordenado, infinito en dos direcciones opuestas. Lo que se quiere decir queda suficientemente indicado con la elección de expresiones tomadas de las representaciones geométricas; tanto más importante resulta señalar las propiedades puramente aritméticas correspondientes, para que ni por un momento se mantenga la apariencia de que la aritmética requiere semejantes representaciones ajenas a ella.

Si se ha de expresar que los signos a y b representan un mismo número racional, se pondrá tanto $a = b$ como $b = a$. Que dos números racionales a, b son diferentes se muestra en que la diferencia $a-b$ tiene un valor positivo o bien negativo. En el primer caso se dice que a es *mayor* que b, y b *menor* que a, lo que se indicará también con los signos $a>b$, $b<a$.** Como en el segundo caso $b-a$ tiene un valor positivo, será $b>a$, $a<b$. Respecto a esta doble posibilidad en el modo de ser diferente valen las siguientes leyes.

---

* Lecciones sobre teoría de números de P. G. Lejeune-Dirichlet. Segunda edición, § 159.

** Por tanto, en todo lo que sigue, siempre que no se añadan las palabras 'en valor absoluto', nos referiremos a la propiedad de ser 'algebraicamente' mayor o menor, como se suele decir.

I. Si $a>b$ y $b>c$, entonces $a>c$. Siempre que a, c sean dos números distintos (o desiguales) y que b sea mayor que uno de ellos y menor que el otro, queremos expresarlo, sin temor a la reminiscencia de representaciones geométricas, diciendo: b está entre los números a y c.

II. Si a y c son números distintos, existen siempre infinitos números b que están entre a y c.

III. Si a es un número determinado, todos los números del sistema ***R*** se descomponen en dos clases, A_1 y A_2, cada una de las cuales contiene infinitos individuos; la primera clase A_1 abarca todos los números a_1 que son $<a$, la segunda clase A_2 abarca todos los números a_2 que son $>a$; el número a puede asignarse arbitrariamente a la primera o a la segunda clase, y de acuerdo con ello es o bien el mayor número de la primera clase o el menor de la segunda. En cada caso la división del sistema ***R*** en las dos clases A_1 y A_2 es tal que todo número de la primera clase A_1 es menor que cada número de la segunda clase A_2.

§2.
Comparación de los números racionales con los puntos de una línea recta.

Las propiedades de los números racionales recién indicadas nos recuerdan las relaciones de lugar recíprocas entre los puntos de una línea recta ***L***. Si distinguimos las dos direcciones opuestas que en ella existen como 'izquierda' y 'derecha', y si p, q son dos puntos distintos, entonces o bien p está a la derecha de q, y a la vez q a la izquierda de p, o bien inversamente q está a la derecha de p, y a la vez p a la izquierda de q. Es imposible un tercer caso si p y q son realmente puntos distintos. Con respecto a estas diferencias de lugar valen las siguientes leyes.

I. Si p está a la derecha de q, y q a la derecha de r, entonces también p está a la derecha de r; y se dice que q está entre los puntos p y r.

II. Si p, r son dos puntos distintos, hay siempre infinitos puntos q que están entre p y r.

III. Si p es un determinado punto de ***L***, todos los puntos de ***L*** se descomponen en dos clases, P_1, P_2, cada una de las cuales contiene infinitos individuos; la primera clase P_1 abarca todos los puntos p_1 que están a la izquierda de p, y la segunda clase P_2 abarca todos los puntos p_2 que están a la derecha de p; el punto p puede asignarse arbitrariamente a la primera o la segunda clase. En cada caso, la descomposición de la recta ***L*** en ambas clases o partes P_1, P_2 es tal que todo punto de la primera clase P_1 está a la izquierda de cada punto de la segunda clase P_2.

Como es bien sabido, esta analogía entre los números racionales y los puntos de una recta se convierte en una verdadera correlación si se

elige en la recta un determinado origen o punto cero *o* y una determinada unidad de medida para la medición de segmentos. Con ayuda de esta última se puede construir para cada número racional *a* una longitud correspondiente, y si dicha longitud se lleva sobre la recta a partir del punto *o* hacia la derecha o hacia la izquierda, según *a* sea positivo o negativo, se alcanza un determinado punto final *p* que puede llamarse el punto correspondiente al número *a*; el número racional cero corresponde al punto *o*. De este modo, a cada número racional *a*, es decir a cada individuo de ***R***, le corresponde un y sólo un punto *p*, es decir un individuo de ***L***. Si a los dos números *a*, *b* les corresponden respectivamente los puntos *p*, *q*, y si $a>b$, entonces *p* está a la derecha de *q*. A las leyes I, II, III del parágrafo anterior les corresponden perfectamente las leyes I, II, III de éste.

§3.
Continuidad de la línea recta.

Es de la mayor importancia el hecho de que en la recta *L* hay infinitos puntos que no corresponden a ningún número racional. Si al punto *p* le corresponde el número racional *a*, como se sabe la longitud *op* es conmensurable con la unidad de longitud invariable empleada para la construcción, esto es, existe una tercera longitud, llamada medida común, de la cual ambas longitudes son múltiplos enteros. Pero ya los antiguos griegos supieron y demostraron que existen longitudes que son inconmensurables con una unidad de longitud dada, por ejemplo la diagonal del cuadrado cuyo lado es la unidad de longitud. Si esa longitud se lleva desde el punto *o* sobre la recta, se obtiene un punto final al que no corresponde ningún número racional. Como además se puede demostrar fácilmente que existen infinitas longitudes que son inconmensurables con la unidad de medida, podemos afirmar: la recta ***L*** es infinitamente más rica en individuos–punto que el dominio ***R*** de los números racionales en individuos–número.

Si ahora pretendemos, como ciertamente es nuestro deseo, seguir aritméticamente todos los fenómenos de la recta, los números racionales no bastan para ello, y por tanto es imprescindible refinar esencialmente el instrumento ***R***, que fue construído mediante la creación de los números racionales, mediante la creación de nuevos números tales que el dominio numérico adquiera la misma completud o, como queremos decir igualmente, la misma *continuidad* que la línea recta.

Las consideraciones precedentes son tan conocidas y familiares para todos, que muchos habrán considerado superflua su repetición. Sin embargo esta recapitulación me pareció necesaria para preparar apro-

piadamente la cuestión principal. La introducción de los números irracionales habitual hasta el momento se refiere directamente a la noción de magnitud extensiva –que nunca es definida rigurosamente– y define el número como el resultado de la medición de una tal magnitud mediante otra homogénea.* En lugar de esto, exijo lo siguiente: la aritmética debe desarrollarse a partir de sí misma. Se puede conceder en general que tales referencias a representaciones no aritméticas han dado la motivación inmediata para la extensión de la noción de número (aunque ciertamente no fue éste el caso en la introducción de los números complejos); pero sin duda esto no es ninguna razón para aceptar esas consideraciones ajenas en la propia aritmética, en la ciencia de los números. Así como los números racionales negativos y quebrados se han producido mediante una creación libre, y como las leyes del cálculo con estos números deben y pueden ser reducidas a las leyes del cálculo con números enteros positivos, igualmente hemos de esforzarnos por definir los números irracionales exclusivamente mediante los números racionales. Sólo está en cuestión el cómo.

La anterior comparación del dominio $\boldsymbol{R}$ de los números racionales con una recta ha conducido al reconocimiento de la lacunariedad, incompletud o discontinuidad del primero, mientras que atribuimos a la recta completud, carencia de lagunas o continuidad. ¿En qué consiste propiamente esta continuidad? En la respuesta a esta pregunta debe estar contenido todo, y sólo mediante ella obtendremos un fundamento científico para la investigación de *todos* los dominios continuos. Naturalmente, no lograremos nada con declaraciones vagas sobre la conexión ininterrumpida de las partes mínimas; se trata de dar una característica precisa de la continuidad que pueda emplearse como base para auténticas deducciones. Reflexioné sobre ello en vano mucho tiempo, pero finalmente encontré lo que buscaba. El hallazgo será quizá juzgado de distinto modo por distintas personas, pero creo que la mayoría encontrará muy trivial su contenido. Consiste en lo siguiente. En el parágrafo precedente se ha hecho notar que todo punto p de la recta produce una descomposición de la misma en dos partes, y que todo punto de una parte está a la izquierda de cada punto de la otra. Encuentro la esencia de la continuidad en la inversa, esto es, en el siguiente principio:

---

* La aparente ventaja de la generalidad de esta definición del número desaparece en cuanto pensamos en los números complejos. Desde mi punto de vista, inversamente, la noción de proporción entre dos magnitudes homogéneas sólo puede desarrollarse con claridad una vez que se han introducido los números irracionales.

"Si todos los puntos de la recta se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un y sólo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos partes."

Como ya he dicho, creo que no me equivoco al suponer que todo el mundo concederá en seguida la verdad de esta afirmación; la mayoría de mis lectores quedarán muy decepcionados al saber que mediante esta trivialidad se pretende haber descubierto el misterio de la continuidad. Sobre esto anoto lo siguiente. Me gustará mucho que todo el mundo encuentre el principio anterior tan evidente y tan coincidente con sus representaciones de una línea; porque no estoy en condiciones de ofrecer ninguna demostración de su corrección, y nadie lo está. La suposición de esta propiedad de la línea no es más que un axioma mediante el cual atribuímos a la línea por vez primera su continuidad, mediante el cual introducimos la continuidad en nuestra idea de la línea. Si el espacio tiene una existencia real, sin duda *no* es necesario que sea continuo; innumerables propiedades suyas seguirían siendo las mismas aunque fuera discontinuo. Y si supiéramos con certeza que el espacio es discontinuo, sin duda nada nos podría impedir, si así lo quisiéramos, que lo hiciéramos continuo en el pensamiento rellenando sus lagunas; pero esta compleción consistiría en una creación de individuos-punto, y habría de realizarse de acuerdo con el principio anterior.[4]

§4.
Creación de los números irracionales.

Con las últimas palabras queda suficientemente indicado de qué manera debe ser completado el dominio discontinuo ***R*** de los números racionales para obtener uno continuo. En el § 1 se ha señalado (III) que cada número racional a produce una descomposición del sistema ***R*** en dos clases A_1, A_2 tales que todo número a_1 de la primera clase A_1 es menor que cada número a_2 de la segunda clase A_2; el número a es o bien el mayor número de la clase A_1 o bien el menor de la A_2. Ahora, dada cualquier partición del dominio ***R*** en dos clases A_1, A_2, que sólo tiene *la* propiedad característica de que todo número a_1 de A_1 es menor que todo número a_2 de A_2, queremos, para abreviar, denominar a tal partición una *cortadura* y denotarla mediante (A_1,A_2). Podemos decir entonces que todo número racional a produce una cortadura, o propiamente dos que sin embargo no queremos considerar como esencialmente diferentes; esta cortadura tiene *además* la propiedad de

que o bien entre los números de la primera clase existe uno mayor o entre los de la segunda clase existe uno menor. E inversamente, si una cortadura posee también esta propiedad será producida por ese número racional mayor o menor.

Pero es fácil convencerse de que existen infinitas cortaduras que no son producidas por números racionales. El ejemplo más inmediato es el siguiente.

Sea *D* un número entero positivo, pero no el cuadrado de un número entero; entonces hay un número entero positivo λ tal que

$$\lambda^2 < D < (\lambda+1)^2.$$

Tomando en la segunda clase A_2 todos los números racionales positivos a_2 cuyo cuadrado es $>D$, y en la primera clase A_1 todos los demás números racionales a_1, esta partición constituye una cortadura (A_1,A_2), es decir, que todo número a_1 es menor que todo número a_2. A saber, si a_1 es $=0$ o negativo, ya por esta razón es a_1 menor que cualquier número a_2, porque según la definición éste es positivo; pero si a_1 es positivo, entonces su cuadrado es $\leq D$, y consiguientemente a_1 es menor que todo número positivo a_2 cuyo cuadrado es $>D$.

Pero esta cortadura no es producida por ningún número racional. Para probarlo debe mostrarse ante todo que no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea $=D$. Aunque esto es conocido por los primeros elementos de la teoría de números, quizá la siguiente demostración indirecta venga aquí a cuento. Si hay un número racional cuyo cuadrado es $=D$, hay también dos números enteros positivos *t*, *u* que satisfacen la ecuación

$$t^2-Du^2=0,$$

y podemos suponer que *u* es el *menor* número entero positivo que posee la propiedad de que su cuadrado se transforma, al multiplicarlo por D, en el cuadrado de un número entero positivo *t*. Como claramente

$$\lambda u < t < (\lambda+1)u,$$

el número

$$u' = t - \lambda u$$

será un número entero positivo, y precisamente *menor* que *u*. Si ponemos además

$$t' = Du - \lambda t,$$

t' será igualmente un número entero positivo, y se deduce que

$$t'^2 - Du'^2 = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0,$$

lo que entra en contradicción con el supuesto sobre u.

Con esto, el cuadrado de todo número racional es o bien $<D$ o $>D$. De aquí se deduce fácilmente que ni en la clase A_1 hay un número mayor, ni en la clase A_2 uno menor. Pues si ponemos

$$y = \frac{x(x^2+3D)}{3x^2+D}$$

entonces

$$y-x = \frac{2x(D-x^2)}{3x^2+D}$$

y

$$y^2-D = \frac{(x^2-D)^3}{(3x^2+D)^2}$$

Poniendo aquí en lugar de x un número positivo de la clase A_1, tendremos $x^2<D$, y consiguientemente $y>x$, $y^2<D$, por lo que y pertenece igualmente a la clase A_1. Pero si ponemos en lugar de x un número de la clase A_2, entonces $x^2>D$, y consiguientemente $y<x$, $y>0$ e $y^2>D$, de modo que y pertenece igualmente a la clase A_2. Por tanto, esa cortadura no será producida por ningún número racional.

En esta propiedad de que no todas las cortaduras son producidas por números racionales consiste la incompletud o discontinuidad del dominio $\boldsymbol{R}$ de todos los números racionales.

Ahora, cada vez que encontramos una cortadura (A_1,A_2) que no es producida por ningún número racional, *creamos* un nuevo número *irracional* α, que consideramos completamente definido mediante esa cortadura (A_1,A_2); diremos que el número α corresponde a esa cortadura, o que produce esa cortadura. Por tanto, a partir de ahora corresponde a cada cortadura un y sólo un número racional o irracional determinado, y consideramos que dos números son *diferentes* o *desiguales* siempre y sólo cuando corresponden a cortaduras esencialmente diferentes.

Para conseguir un fundamento para la ordenación de todos los números *reales*, es decir, todos los racionales e irracionales, debemos

investigar en primer lugar las relaciones entre cualesquiera dos cortaduras (A_1,A_2) y (B_1,B_2), que sean producidas por dos números α y β cualesquiera. Está claro que una cortadura (A_1,A_2) queda ya completamente determinada cuando se conoce una de ambas clases, por ejemplo la primera A_1, porque la segunda A_2 consiste en todos los números racionales no contenidos en A_1, y la propiedad característica de semejante primera clase A_1 consiste en que cuando el número a_1 está contenido en ella, también lo están todos los números menores que a_1. Si ahora comparamos dos primeras clases A_1, B_1, puede suceder 1. que sean totalmente idénticas, es decir que todo número a_1 contenido en A_1 esté también contenido en B_1 y que todo número b_1 contenido en B_1 esté también contenido en A_1. En este caso es necesario que también A_2 y B_2 sean idénticas, y ambas cortaduras son totalmente idénticas, lo que denotamos simbolicamente mediante $\alpha=\beta$ o $\beta=\alpha$.

Pero si las dos clases A_1, B_1 no son idénticas, entonces hay en una de ellas, por ejemplo en A_1, un número $a'_1= b'_2$ que no está contenido en la otra, B_1, y que por tanto se encuentra en B_2; con lo que ciertamente todos los números b_1 contenidos en B_1 son menores que este número $a'_1=b'_2$, y por consiguiente todos los números b_1 están también contenidos en A_1.

Si ahora 2. este número a'_1 es el único de A_1 que no está contenido en B_1, cualquier otro número a_1 contenido en A_1 está contenido en B_1, y por tanto es menor que a'_1, es decir que a'_1 es el mayor entre todos los números a_1, con lo que la cortadura (A_1,A_2) será producida por el número racional $\alpha=a'_1=b'_2$. De la otra cortadura (B_1,B_2) sabemos ya que todos los números b_1 de B_1 están contenidos también en A_1 y son menores que el número $a'_1=b'_2$, que está contenido en B_2; pero cualquier otro número b_2 contenido en B_2 debe ser mayor que b'_2, porque si no sería también menor que a'_1, de modo que estaría contenido en A_1 y consiguientemente también en B_1; con lo que b'_2 es el menor de todos los números contenidos en B_2, y por tanto también la cortadura (B_1,B_2) será producida por el mismo número racional $\beta=b'_2=a'_1=\alpha$. Ambas cortaduras son por tanto sólo inesencialmente diferentes.

Pero 3. si en A_1 hay al menos dos números diferentes $a'_1=b'_2$ y $a''_1=b''_2$ que no están contenidos en B_1, entonces hay infinitos, porque los infinitos números que están entre a'_1 y a''_1 (§ 1.II) claramente están contenidos en A_1 pero no en B_1. En este caso decimos que los números α y β, que corresponden a estas dos cortaduras esencialmente diferentes (A_1,A_2) y (B_1,B_2), son también *diferentes* entre sí, y decimos precisamente que α es *mayor* que β y que β es *menor* que α, lo que representamos simbólicamente mediante $\alpha>\beta$, $\beta<\alpha$. Con esto se pone de relieve que esta definición coincide totalmente con la anterior si los dos números α, β son racionales.

Los casos restantes son los siguientes. Si 4. hay en B_1 un y sólo un número $b'_1=a'_2$ que no está contenido en A_1, ambas cortaduras (A_1,A_2), (B_1,B_2) sólo son inesencialmente diferentes y son producidas por un mismo número racional $\alpha=a'_2=b'_1=\beta$. Pero si 5. en B_1 hay al menos dos números diferentes que no están contenidos en A_1, entonces $\beta>\alpha$, $\alpha<\beta$.

Como con esto hemos agotado todos los casos, se deduce que de dos números diferentes necesariamente uno es el mayor y el otro el menor, con lo que existen dos posibilidades. Es imposible un tercer caso. Esto estaba ya implícito en la elección del *comparativo* (mayor, menor) para designar la relación entre α, β; pero sólo ahora queda justificada esa elección. Precisamente en este tipo de investigaciones hay que guardarse con todo cuidado de que, aún con los mejores deseos de ser honrados, una elección precipitada de expresiones tomadas de otras nociones ya desarrolladas nos induzca a realizar transferencias ilícitas de un dominio al otro.

Si consideramos otra vez el caso $\alpha>\beta$, se deduce que el número menor β, si es racional, pertenece ciertamente a la clase A_1; pues ya que en A_1 hay un número $a'_1=b'_2$ que pertenece a la clase B_2, el número β, ya sea el mayor número de B_1 o el menor de B_2, es ciertamente $\leq a'_1$ y consiguientemente está contenido en A_1. Igualmente se deduce de $\alpha>\beta$ que el número mayor α, si es racional, pertenece ciertamente a la clase B_2, porque $\alpha\geq a'_1$. Uniendo ambas consideraciones se obtiene el siguiente resultado: Si una cortadura (A_1,A_2) es producida por el número α, cualquier número racional pertenece a la clase A_1 o a la clase A_2 según sea menor o mayor que α; si el propio número α es racional, puede pertenecer a una u otra clase.

De aquí se sigue finalmente lo siguiente. Si $\alpha>\beta$, o sea, si en A_1 hay infinitos números que no están contenidos en B_1, entonces hay también infinitos números de ese tipo que son diferentes de α y de β; cada uno de esos números racionales c es $<\alpha$ porque está contenido en A_1, e igualmente es $>\beta$ porque está contenido en B_2.

§5.
Continuidad del dominio de los números reales.

De acuerdo con las distinciones establecidas arriba, el dominio $\mathfrak{R}$ de todos los números reales constituye un dominio bien ordenado de una dimensión; lo único que se quiere decir con esto es que se cumplen las siguientes leyes.

I. Si $\alpha>\beta$ y $\beta>\gamma$, entonces también $\alpha>\gamma$. Diremos que el número β está entre los números α y γ.

II. Si α, γ son dos números diferentes, hay siempre infinitos números distintos β que están entre α y γ.

III. Si α es un número determinado, todos los números del sistema $\mathfrak{R}$ se descomponen en dos clases $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$, cada una de las cuales contiene infinitos individuos; la primera clase $\mathfrak{A}_1$ abarca todos los números α_1 que son $<\alpha$, la segunda clase $\mathfrak{A}_2$ abarca todos los números α_2 que son $>\alpha$; el propio número α puede asignarse a voluntad a la primera o a la segunda clase, y de acuerdo con ello es el mayor número de la primera clase o el menor de la segunda. En cualquier caso la descomposición del sistema $\mathfrak{R}$ en ambas clases $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ es tal que todo número de la primera clase $\mathfrak{A}_1$ es menor que cada número de la segunda clase $\mathfrak{A}_2$, y decimos que esta descomposición ha sido producida por el número α.

Para abreviar y para no cansar al lector suprimo las demostraciones de estos teoremas, que se siguen inmediatamente de las definiciones del parágrafo anterior.

Pero además de esas propiedades, el dominio $\mathfrak{R}$ posee también *continuidad*, es decir que se cumple el siguiente teorema:

IV. Si el sistema $\mathfrak{R}$ de todos los números reales se descompone en dos clases $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ tales que todo número α_1 de la primera clase $\mathfrak{A}_1$ es menor que todo número α_2 de la segunda clase $\mathfrak{A}_2$, existe un y sólo un número α mediante el cual se produce esa división.

Prueba. Mediante la descomposición o la cortadura de $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$ se determina igualmente una cortadura (A_1, A_2) del sistema $\boldsymbol{R}$ de todos los números racionales, definida por el hecho de que A_1 contiene todos los números racionales de la clase $\mathfrak{A}_1$ y A_2 todos los restantes números racionales, es decir todos los números racionales de la clase $\mathfrak{A}_2$. Sea α el número totalmente determinado que produce esa cortadura (A_1, A_2). Si ahora β es cualquier número distinto de α, hay siempre infinitos números racionales c que están entre α y β. Si $\beta<\alpha$, entonces $c<\alpha$; con lo que c pertenece a la clase A_1 y consiguientemente también a la clase $\mathfrak{A}_1$, y como igualmente $\beta<c$, también β pertenece a la misma clase $\mathfrak{A}_1$, ya que todo número de $\mathfrak{A}_2$ es mayor que todo número c de $\mathfrak{A}_1$. Pero si $\beta>\alpha$, entonces $c>\alpha$; con lo que c pertenece a la clase A_2 y por consiguiente también a la clase $\mathfrak{A}_2$, y como igualmente $\beta>c$, también β pertenece a la clase $\mathfrak{A}_2$, ya que todo número de $\mathfrak{A}_1$ es menor que todo número c de $\mathfrak{A}_2$. Con esto, cada número β diferente de α pertenece a la clase $\mathfrak{A}_1$ o a la clase $\mathfrak{A}_2$ según sea $\beta<\alpha$ o $\beta>\alpha$; por tanto el propio α es o bien el mayor número de $\mathfrak{A}_1$ o el menor de $\mathfrak{A}_2$, es decir que α es un número, y claramente el único, mediante el cual se produce la descomposición de $\mathfrak{R}$ en las clases $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, como queríamos demostrar.

§6.
Cálculos con números reales.

Para reducir cualquier cálculo con dos números reales α, β a los cálculos con números racionales basta con definir a partir de las cortaduras (A_1,A_2) y (B_1,B_2), que son producidas en el sistema $\boldsymbol{R}$ por los números α y β, la cortadura (C_1,C_2) que ha de corresponder al resultado del cálculo γ. Me limito aquí al desarrollo del ejemplo más sencillo, la adición.

Si c es cualquier número racional, lo incluimos en la clase C_1 si hay un número a_1 en A_1 y un número b_1 en B_1 tales que su suma a_1+b_1 es $\geq c$; ponemos todos los demás números racionales c en la clase C_2. Esta partición de todos los números racionales en las dos clases C_1, C_2 constituye claramente una cortadura, porque todo número c_1 contenido en C_1 es menor que cada número c_2 de C_2. Si ambos números α, β son racionales, todo número c_1 contenido en C_1 es $\leq\alpha+\beta$, porque $a_1\leq\alpha$, $b_1\leq\beta$, por lo que también $a_1+b_1\leq\alpha+\beta$; si además un número c_2 contenido en C_2 fuera $<\alpha+\beta$, o sea si $\alpha+\beta=c_2+p$, donde p designa un número racional positivo, tendríamos

$$c_2 = (\alpha-\tfrac{1}{2}p)+(\beta-\tfrac{1}{2}p),$$

lo que entra en contradicción con la definición del número c_2, porque $\alpha-\tfrac{1}{2}p$ es un número de A_1 y $\beta-\tfrac{1}{2}p$ es un número de B_1; por tanto todo número c_2 contenido en C_2 es $\geq\alpha+\beta$. Con lo que en este caso la cortadura (C_1,C_2) será producida por la suma $\alpha+\beta$. Por tanto no se infringe la definición válida en la aritmética de los racionales, si en todos los casos se entiende por *suma* $\alpha+\beta$ de dos números reales cualesquiera α, β aquel número γ mediante el cual se produce la cortadura (C_1,C_2). Si sólo uno de ambos números, por ejemplo α, es racional, es fácil convencerse de que no tiene ninguna influencia en la suma $\gamma=\alpha+\beta$ que pongamos el número α en la clase A_1 o en la clase A_2.

Al igual que la adición, se pueden definir también las restantes operaciones de la llamada aritmética elemental, a saber, la construcción de diferencias, productos, cocientes, potencias, raíces, logaritmos, y de esta manera se obtienen auténticas demostraciones de teoremas (como por ejemplo $\sqrt{2}.\sqrt{3}=\sqrt{6}$) que por lo que sé nunca hasta ahora han sido probados. Las prolijidades que son de temer en las definiciones de las operaciones más complicadas descansan en parte en la naturaleza del asunto, pero la mayoría de las veces se pueden evitar. A este respecto es muy útil la noción de *intervalo*, es decir, un sistema A de números racionales que posee la siguiente propiedad característica: si a y a' son

números del sistema A, todos los números racionales comprendidos entre a y a' están también contenidos en A. El sistema $\boldsymbol{R}$ de todos los números racionales, así como las dos clases de cualquier cortadura, son intervalos. Si hay un número racional a_1 que es menor, y un número racional a_2 que es mayor que todo número del intervalo A, se dice que A es un intervalo finito; claramente, existen entonces infinitos números con la misma propiedad que a_1, e infinitos con la misma propiedad que a_2; todo el dominio $\boldsymbol{R}$ se divide en tres partes A_1, A, A_2, y aparecen dos números racionales o irracionales α_1, α_2 totalmente determinados, que pueden denominarse respectivamente los *límites* inferior y superior (o menor y mayor) del intervalo A; el límite inferior α_1 queda determinado por la cortadura cuya primera clase es el sistema A_1, y el límite superior α_2 mediante la cortadura de la que A_2 forma la segunda clase. De cada número racional o irracional que está entre α_1 y α_2, se puede decir que está *dentro* del intervalo A. Si todos los números de un intervalo A son también números de un intervalo B, se dice que A es una parte de B.

Parece que habría que esperar prolijidades todavía mayores cuando se quisiera dar un paso más y generalizar los innumerables teoremas de la aritmética de los números racionales (como por ejemplo el teorema $(a+b)c = ac+bc$) a números reales cualesquiera. Sin embargo no es así; nos convenceremos rápidamente de que en este punto todo depende de probar que las propias operaciones aritméticas poseen una cierta continuidad. Expresaré lo que quiero decir en forma de un teorema general:

"Si el número λ es el resultado de un cálculo realizado sobre los números α, β,γ ..., y si λ está dentro del intervalo L, se pueden determinar intervalos A, B, C... dentro de los cuales se encuentren los números α, β, γ..., y tales que el resultado del mismo cálculo, al sustituir los números α, β, γ... por cualesquiera números de los intervalos A, B, C..., es siempre un número que está dentro del intervalo L."[5] Pero la espantosa torpeza que conlleva la expresión de semejante teorema nos convence de que debemos hacer algo para que el lenguaje venga en nuestra ayuda; esto se logrará completamente si se introducen las nociones de *magnitud variable*, de *función* y de *valor límite*, y lo más conveniente es precisamente basar en estos conceptos las propias definiciones de las operaciones aritméticas más sencillas, cosa que sin embargo no podemos desarrollar aquí.

§7.
Análisis infinitesimal.

Para acabar, nos limitaremos aquí a aclarar la relación que hay entre las consideraciones precedentes y determinados teoremas fundamentales del análisis infinitesimal.

Decimos que una magnitud variable x, que recorre sucesivamente determinados valores numéricos, se aproxima a un *valor límite* fijo α, cuando en el curso del proceso x viene a quedar finalmente entre cualesquiera dos números entre los cuales se encuentra el propio α, o lo que es lo mismo, cuando la diferencia $x-\alpha$ tomada en valor absoluto desciende finalmente por debajo de cualquier valor dado distinto de cero.

Uno de los teoremas más importantes dice lo siguiente: 'Si una magnitud x crece constantemente, pero no más allá de todo límite, entonces se aproxima a un valor límite.'

Lo demuestro de la siguiente manera. Por hipótesis hay un número α_2, y por tanto infinitos, tales que siempre $x<\alpha_2$; designo mediante $\mathfrak{A}_2$ el sistema de todos estos números α_2, y con $\mathfrak{A}_1$ el sistema de todos los demás números α_1; cada uno de estos últimos tiene la propiedad de que en el curso del proceso x se hace finalmente $\geq\alpha_1$, con lo que todo número α_1 es menor que cualquier número α_2, y por consiguiente existe un número α que o bien es el mayor de $\mathfrak{A}_1$ o el menor de $\mathfrak{A}_2$ (§ 5, IV). Lo primero no puede suceder porque x nunca deja de crecer, de modo que α es el menor número de $\mathfrak{A}_2$. Sea cual sea el número α_1 que escojamos, finalmente se hará $\alpha_1<x<\alpha$, es decir que x se aproxima al valor límite α.

Este teorema es equivalente con el principio de continuidad, es decir que pierde su validez tan pronto como consideramos que un solo número real del dominio $\mathfrak{R}$ no está presente; o dicho de otra manera: si este teorema es correcto, también el teorema IV del § 5 es correcto.

Otro teorema del análisis infinitesimal, que igualmente es equivalente, y que se utiliza todavía con más frecuencia, dice como sigue: 'Si en el proceso de variación de una magnitud x se puede determinar, para cada magnitud positiva δ dada, un valor correspondiente a partir del cual x varía menos que δ, entonces x se aproxima a un valor límite.'

Esta inversión del teorema, fácil de demostrar, de que toda magnitud variable que se aproxima a un valor límite varía finalmente menos que cualquier magnitud positiva dada, puede ser derivada tanto a partir del teorema anterior como directamente partiendo del principio de continuidad. Sigo el último camino. Sea δ una magnitud positiva cualquiera (es decir $\delta>0$), entonces según la hipótesis habrá un momento a partir

del cual x variará menos que δ, es decir que si x posee en ese momento el valor a, en lo sucesivo será siempre $x>a-\delta$ y $x<a+\delta$. Prescindo de momento del supuesto original y mantengo sólo el hecho recién demostrado de que todos los valores posteriores de la variable x están entre dos valores finitos determinables. Baso en ello una doble partición de todos los números reales. Pongo un número α_2 (por ejemplo $a+\delta$) en el sistema $\mathfrak{A}_2$ si en el curso del proceso se hace finalmente $x\leq\alpha_2$; en el sistema $\mathfrak{A}_1$ pongo todo número no contenido en $\mathfrak{A}_2$; si α_1 es uno de esos números, por muy avanzado que esté el proceso, encontraremos todavía infinitas veces que $x>\alpha_1$. Como cada número α_1 es menor que todo número α_2, hay un número completamente determinado α que produce esta cortadura $(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2)$ del sistema $\mathfrak{R}$, número al que quiero llamar valor límite superior de la variable x, que toma siempre valores finitos. El comportamiento de la variable x producirá igualmente una segunda cortadura $(\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2)$ del sistema $\mathfrak{R}$: pondremos un número β_1 (por ejemplo $a-\delta$) en $\mathfrak{B}_1$ cuando en el curso del proceso se haga finalmente $x\geq\beta_1$; cualquier otro número β_2, que pondremos en $\mathfrak{B}_2$, tiene la propiedad de que nunca se hace finalmente $x\geq\beta_2$, de modo que en cada momento encontraremos todavía infinitas veces $x<\beta_2$; el número β mediante el cual se produce esa cortadura se llama valor límite inferior de la variable x. Está claro que ambos números α, β quedan también caracterizados por la siguiente propiedad: si ε es una magnitud positiva tan pequeña como se quiera, siempre se hará finalmente $x<\alpha+\varepsilon$ y $x>\beta-\varepsilon$, pero nunca finalmente $x<\alpha-\varepsilon$ ni $x>\beta+\varepsilon$. Ahora son posibles dos casos. Si α y β son distintos entre sí, necesariamente $\alpha>\beta$, porque α_2 es siempre $\geq\beta_1$; la variable x oscila, y sufre siempre, por mucho que desarrollemos el proceso, variaciones que superan el valor $(\alpha-\beta)-2\varepsilon$, donde ε designa una magnitud positiva tan pequeña como queramos. Pero la hipótesis original, a la que sólo ahora vuelvo, contradice esta consecuencia; por tanto sólo queda el segundo caso $\alpha=\beta$, y como ya se ha demostrado que, por pequeña que sea la magnitud positiva ε, siempre será finalmente $x<\alpha+\varepsilon$ y $x>\beta-\varepsilon$, x se aproxima al valor límite α, como queríamos demostrar.

Estos ejemplos pueden bastar para hacer patente la relación entre el principio de continuidad y el análisis infinitesimal.

¿Qué son y para qué sirven los números?

Contenido

¿QUÉ SON Y PARA QUÉ SIRVEN LOS NÚMEROS?

'Αεὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει

Prólogo a la primera edición.

Lo que es demostrable, no debe aceptarse en ciencia sin demostración. Por evidente que parezca esta exigencia, según creo, no hay que considerarla satisfecha ni siquiera en la fundamentación de la ciencia más sencilla, aquella parte de la lógica que trata de la teoría de los números, ni aun en las exposiciones más recientes.*[1] Al decir que la aritmética (álgebra, análisis)[2] es sólo una parte de la lógica, estoy manifestando ya que considero el concepto de número como algo completamente independiente de las representaciones o intuiciones del espacio y del tiempo, como algo que es más bien un resultado inmediato de las puras leyes del pensamiento. Mi respuesta fundamental a la pregunta que se establece en el título de este escrito es: los números son creaciones libres del espíritu humano, sirven como medio para concebir más fácil y claramente la diversidad de las cosas.[3] Mediante la construcción puramente lógica de la ciencia de los números, y mediante el dominio numérico continuo que con ella se obtiene, nos encontramos por vez primera en situación de investigar con precisión nuestras representaciones de espacio y tiempo, relacionándolas con este dominio numérico creado en nuestra mente.** Considerando atentamente lo que hacemos al contar una cantidad o número de cosas, nos vemos llevados

---

* De los escritos que conozco mencionaré el meritorio *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* de E. Schröder (Leipzig 1873), en el que se puede encontrar bibliografía, y además los ensayos de Kronecker y de Helmholtz sobre el concepto de número y sobre contar y medir (en la colección de artículos filosóficos dedicados a E. Zeller, Leipzig 1887). La aparición de estos artículos es el motivo que me ha impulsado a hacer aparecer también mi concepción del tema, similar a aquellas en muchos respectos pero esencialmente diferente en sus fundamentos, concepción que he construído hace muchos años y sin ninguna influencia de otros autores.

** Cf. el § 3 de mi escrito: *Continuidad y números irracionales* (Braunschweig 1872).

a observar la capacidad mental de relacionar cosas con cosas, hacer corresponder una cosa a otra, o representar una cosa mediante otra, facultad sin la cual sería absolutamente imposible el pensamiento. Según mi opinión, como ya he afirmado en un anuncio de este escrito,* la ciencia entera de los números debe erigirse sobre este único fundamento, que es además absolutamente indispensable. La intención de hacer una exposición semejante la tengo ya desde antes de la publicación de mi escrito sobre la continuidad, pero sólo después de la aparición del mismo, y con muchas interrupciones motivadas por el aumento de mis ocupaciones profesionales y por otros trabajos necesarios, he podido escribir entre los años 1872 y 1878 un primer borrador de pocas hojas, que luego han ojeado y discutido conmigo parcialmente varios matemáticos.[4] Este borrador lleva el mismo título y contiene ya, aunque no en el mejor orden, todos los pensamientos fundamentales de mi presente escrito, que sólo les aporta una presentación más cuidada; como tales puntos fundamentales mencionaré aquí la distinción nítida entre lo finito y lo infinito (64), la noción de número cardinal (161), la demostración de que el método de prueba conocido bajo el nombre de inducción completa (o paso de n a n+1) es realmente concluyente (59, 60, 80), y de que también la definición por inducción (o recursión) es categórica y está libre de contradicción (126).

Este escrito lo puede entender todo aquel que posea lo que se llama un sano sentido común; no se necesitan en absoluto conocimientos filosóficos o matemáticos. Pero sé perfectamente que muy pocos querrán reconocer, en las vagas figuras a las que les conduzco, sus números, que les han acompañado toda su vida como amigos fieles y familiares; les espantará la larga serie de conclusiones simples que corresponde a las características de nuestro escalonado entendimiento [Treppenverstand; lit. 'entendimiento en escalera'], así como el seco análisis de la serie de pensamientos sobre los que descansan las leyes de los números, y les impacientará tener que seguir demostraciones de verdades que resultan, para su supuesta intuición interior, evidentes y seguras de antemano. Por el contrario, yo encuentro en esa misma posibilidad de reducir semejantes verdades a otras más simples, por larga y aparentemente artificial que pueda resultar la serie de razonamientos, una prueba convincente de que su posesión o la creencia en ellas nunca viene dada inmediatamente por intuición interior, sino que se obtiene únicamente a través de una repetición más o menos completa de cada

---

* Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, tercera edición, 1879, § 163, nota a la pag. 470.

uno de los razonamientos. Me gustaría comparar esa actividad mental, difícil de seguir debido a la rapidez de su ejecución, con la que desarrolla al leer un lector experto; también leer supone siempre una repetición más o menos completa de cada uno de los pasos que debe dar el principiante que deletrea penosamente; al experto le basta una pequeña parte de los mismos, y por tanto escaso trabajo o esfuerzo mental, para reconocer la palabra correcta, claro que sólo con una probabilidad muy alta; porque, como se sabe, incluso el corrector de pruebas más experto deja pasar de vez en cuando una errata, es decir, la lee mal, lo que sería imposible si la cadena de pensamientos correspondiente al deletreo se repitiese completamente. Así también nos vemos conducidos constantemente y cada vez más, ya desde nuestro nacimiento, a relacionar cosas con cosas, y de esta forma a ejercitar esa capacidad mental sobre la que descansa la creación de los números; mediante esta práctica incesante pero no premeditada, que tiene lugar ya en nuestros primeros años de vida, y mediante la correspondiente construcción de juicios y series de inferencias, alcanzamos un tesoro de verdades propiamente aritméticas, a las que más tarde se referirán nuestros primeros maestros como a algo sencillo, evidente, dado en la intuición interior; y así sucede que muchos conceptos que son realmente muy complicados (como por ejemplo el de número [cardinal] de cosas) se tienen equivocadamente por simples. En este sentido, al que me refiero con las palabras ἀεὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει, construidas a imitación de un dicho famoso,[5] ojalá que las siguientes páginas tengan un buen recibimiento, como un intento de erigir la ciencia de los números sobre fundamentos uniformes, y ojalá estimulen a otros matemáticos a reducir las largas series de demostraciones a una cantidad más discreta y agradable.

De acuerdo con el propósito de este escrito me limito a la consideración de la serie de los llamados números naturales. De qué manera se puede realizar luego la extensión progresiva del concepto de número, la creación del cero, de los números negativos, quebrados, irracionales y complejos, reduciéndolos siempre a las nociones previas y sin que se inmiscuyan en absoluto ideas extrañas (como por ejemplo la de cantidad medible), que en mi opinión sólo mediante la ciencia de los números pueden elevarse a una claridad completa, lo he mostrado ya en mi escrito anterior sobre la continuidad (1872), al menos para el caso de los números irracionales. Como ya manifestaba allí mismo (§ 3), es fácil tratar las demás extensiones de forma completamente similar, y me reservo el derecho de ofrecer algún día una exposición completa de esta cuestión. Desde ese punto de vista resulta evidente, y nada nuevo, que todo teorema del álgebra y del análisis superior, por alejado que esté, puede expresarse como un teorema sobre números naturales, afirma-

ción que también he oído repetidas veces en boca de Dirichlet. Pero de ningún modo encuentro algo meritorio –y esto estaba también muy lejos de Dirichlet– en realizar de hecho ese penoso circunloquio y no utilizar ni querer admitir más números que los naturales. Por el contrario, los avances mayores y más fructíferos en la matemática y en otras ciencias se han realizado principalmente a través de la creación e introducción de nuevos conceptos, impulsada por la frecuente repetición de fenómenos complejos, que sólo a duras penas podían ser dominados mediante los viejos conceptos.[6] Sobre este asunto sostuve ya en el verano de 1854, con ocasión de mi habilitación como Privatdozent en Göttingen, una conferencia, ante la facultad de filosofía, cuyo punto de vista fue aprobado incluso por Gauss; pero no es éste el lugar de extenderse más sobre ese tema.

En lugar de ello aprovecharé la ocasión para hacer algunas consideraciones relacionadas con mi escrito anterior, ya mencionado, sobre continuidad y números irracionales. La teoría de los números irracionales que en él se desarrolla, ideada en otoño de 1858, se basa en aquel fenómeno que ocurre en el dominio de los números racionales (§ 4) al que he puesto el nombre de cortadura y que he sido el primero en investigar detenidamente, y culmina en la demostración de la continuidad del nuevo dominio de los números reales (§ 5.IV). Esa teoría me parece más sencilla, yo diría incluso más serena, que las otras dos, distintas tanto de aquella como entre sí, creadas por los señores Weierstrass y Cantor, teorías que en cualquier caso son completamente rigurosas. Más tarde ha sido recogida, sin cambios esenciales, por el señor U. Dini en los *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* (Pisa 1878); pero la circunstancia de que, en el desarrollo de esa exposición, mi nombre no se mencione al describir el fenómeno puramente aritmético de la cortadura, sino casualmente allí donde se trata de la existencia de una magnitud medible correspondiente a la cortadura, podría quizá llevar a sospechar que mi teoría se apoya en la consideración de semejantes magnitudes. Nada podría ser más erróneo; más bien he aducido en el § 3 de mi escrito varias razones por las que rechazo totalmente la inmiscusión de magnitudes medibles, y especialmente al final observo respecto a su existencia que para una gran parte de la ciencia del espacio la continuidad de sus figuras no es ni siquiera una suposición necesaria, al margen de que en las obras de geometría esa noción se mencione incidentalmente de forma nominal, pero nunca es definida con precisión, y por tanto tampoco se hace susceptible de demostración. Para aclarar esto algo más, considero a modo de ejemplo lo siguiente. Elíjanse arbitrariamente tres puntos A, B, C que no estén en línea recta, con la única condición de que las proporciones de sus

distancias *AB*, *AC*, *BC* sean números algebraicos,* y considérese que en el espacio sólo existen aquellos puntos *M* para los cuales las proporciones entre *AM*, *BM*, *CM* y *AB* sean igualmente números algebraicos; entonces el espacio compuesto de estos puntos es discontinuo por todas partes, como es fácil ver; pero a pesar de la discontinuidad o lacunariedad de este espacio, todas las construcciones que intervienen en los *Elementos* de Euclides son, hasta donde yo veo, igualmente practicables que en el espacio totalmente continuo; la discontinuidad de este espacio no se observaría, no se experimentaría en absoluto en la ciencia de Euclides. Si alguien me objetara que no podemos en absoluto pensar el espacio de otra forma que continuo, me gustaría dudarlo y llamar la atención sobre lo desarrollada y sutil que es la formación científica necesaria simplemente para reconocer con claridad la esencia de la continuidad, y para comprender que fuera de las proporciones racionales entre magnitudes también pueden considerarse las proporciones irracionales, y fuera de las algebraicas también las trascendentes. Tanto más hermoso me parece que el hombre pueda, sin ninguna representación de las magnitudes medibles, y a través de un sistema finito de razonamientos simples, elevarse a la creación del dominio aritmético puro y continuo; y sólo con este medio le es posible, en mi opinión, perfeccionar la representación del espacio continuo hasta hacerla clara.

La misma teoría de los números irracionales basada en el fenómeno de la cortadura se encuentra expuesta en la *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* de J. Tannery (Paris 1886). Si comprendo correctamente un pasaje del prólogo de esta obra, el autor ideó independientemente esa teoría, es decir, en un tiempo en que le eran desconocidos no sólo mi escrito, sino también los *Fondamenti* de Dini, mencionados en el mismo prólogo; esta coincidencia me parece una agradable prueba de que mi concepción corresponde a la naturaleza de la cosa, lo que también ha sido admitido por otros matemáticos, por ejemplo por el señor M. Pasch en su *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung* (Leipzig 1883). Por contra, no puedo estar de acuerdo sin más con el señor Tannery cuando dice que esta teoría es el desarrollo de una idea procedente del señor J. Bertrand, contenida en su *Traité d'arithmétique*, y que consiste en definir un número irracional especificando todos los números racionales que son menores, y todos los que son mayores que el número que se quiere definir. Sobre esta afirmación, repetida por el señor O. Stolz –al parecer sin mayor examen– en el

* Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 159 de la segunda edición, § 160 de la tercera.

prólogo a la segunda edición de sus *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* (Leipzig 1886), me permito considerar lo siguiente. La convicción de que un número irracional puede considerarse de hecho completamente determinado mediante la especificación recién descrita, constituyó siempre, y sin duda ya antes del señor Bertrand, patrimonio común de todos los matemáticos que se han ocupado del concepto de los irracionales; todo calculador que determina una raíz irracional de una ecuación mediante aproximaciones está siguiendo precisamente ese método; y si se considera el número irracional como una proporción entre magnitudes medibles, única forma en que lo hace el señor Bertrand en su obra (tengo ante mí la octava edición del año 1885), entonces este método de determinación está expresado ya de la manera más clara en la célebre definición que da Euclides (*Elementos*, V.5) para la igualdad de proporciones. Esta antigua convicción es la fuente de mi teoría tanto como de la del señor Bertrand, y de algunos otros intentos más o menos logrados de fundamentar la introducción de los irracionales en la aritmética. Pero si hasta aquí se puede estar totalmente de acuerdo con el señor Tannery, al realizar un verdadero examen del asunto se observará inmediatamente que la exposición del señor Bertrand, en la que el fenómeno de la cortadura en su pureza lógica no se menciona una sola vez, no es en absoluto similar a la mía, en la medida en que busca abrigo en la existencia de magnitudes medibles, cosa que yo rechazo completamente, de acuerdo con las razones arriba mencionadas; y al margen de esta circunstancia, me parece que esa exposición, incluyendo las definiciones y pruebas subsiguientes basadas en la aceptación de esa existencia, presenta todavía algunas lagunas tan esenciales, que la afirmación realizada en mi escrito (§ 6) de que el teorema $\sqrt{2}.\sqrt{3}=\sqrt{6}$ todavía no ha sido nunca probado rigurosamente, me parece justificada también a la vista de esta obra que yo no conocía en aquel tiempo, valiosa en algunos otros respectos.

Harzburg, 5 de octubre de 1887 **R. Dedekind**

Prólogo a la segunda edición.

El presente escrito ha encontrado pronto, tras su aparición, no sólo juicios favorables sino también desfavorables, e incluso se le han reprochado faltas graves. No he podido convencerme de la corrección de esos reproches, y dejo ahora que el escrito, agotado hace poco, y para cuya defensa pública carezco de tiempo, se reimprima sin variaciones, añadiendo entretanto al primer prólogo las siguientes observaciones.

La propiedad que he utilizado como definición de sistema infinito (64) había sido ya subrayada antes de la aparición de mi escrito por Cantor ('Ein Beitrag zur Mannigsfaltigkeitslehre', *Crelles Journal*, tomo 84, 1878) e incluso por Bolzano (*Paradoxien des Unendlichen*, § 20, 1851).[7] Pero ninguno de estos autores ha intentado elevar esa propiedad a definición del infinito, y construir sobre ese fundamento la ciencia de los números de modo rigurosamente lógico, y justamente en esto consiste el contenido de mi arduo trabajo, que había terminado ya en todo lo esencial años antes de la aparición del tratado de Cantor, y en un tiempo en que la obra de Bolzano me era totalmente desconocida incluso de nombre. Para aquellos que tengan interés y comprensión para las dificultades de semejante investigación, añadiré lo siguiente. Se puede establecer una definición completamente diferente de finito e infinito, que parece todavía más sencilla en la medida en que no presupone el concepto de similaridad de una representación (26), a saber:

"Un sistema S se llama finito cuando se puede representar sobre sí mismo (36) de tal manera que ninguna parte propia (6) de S se represente en sí misma; en caso contrario se dice que S es un sistema infinito."

¡Intentemos ahora erigir el edificio sobre este nuevo fundamento! Rápidamente se topa con grandes dificultades, y creo poder afirmar que la propia demostración de la equivalencia total de esta definición con la anterior sólo se puede realizar (aunque entonces fácilmente) cuando se supone desarrollada ya la serie de los números naturales y cuando se puede uno apoyar también en la consideración final de (131); ¡y sin embargo ni en una definición ni en la otra se habla de ninguna de estas cosas! Se verá con esto lo grande que debe ser el número de razonamientos necesarios para semejante transformación de una definición en la otra.

Cerca de un año después de la publicación de mi escrito he conocido los *Grundlagen der Arithmetik* de G. Frege, aparecidos ya en el año 1884. Por distinta que sea de la mía la opinión sobre la esencia del número expuesta en esa obra, contiene sin embargo, especialmente del § 79 en adelante, puntos de estrecho contacto con mi escrito, sobre todo con mi definición (44). Claro que, debido al diferente modo de expresión utilizado, no es fácil reconocer la coincidencia; pero ya la resolución con que el autor se expresa sobre la conclusión de n a n+1 (al pie de la página 93) muestra claramente que se encuentra aquí en el mismo terreno que yo.[8]

Entretanto han aparecido casi completamente (1890-1891) las *Vorlesungen über die Algebra der Logik* de E. Schröder. Es imposible

extenderse aquí sobre la significación de esta obra enormemente sugerente, a la que tributo mis mayores elogios; más bien me gustaría disculparme tan solo de que, a pesar de la observación de la pag. 253 de la primera parte, he mantenido mis símbolos (8) y (17), algo torpes; no pretenden obtener aceptación general, sino que se conforman con servir exclusivamente al propósito de este escrito aritmético, para lo que en mi opinión son más apropiados que los signos de suma y producto.[9]

Harzburg, 24 de agosto de 1893 **R. Dedekind**

Prólogo a la tercera edición.

Cuando hace ocho años fui invitado a reemplazar la segunda edición de este escrito, entonces ya agotada, por una tercera, tuve escrúpulos en admitirlo porque entretanto se han mostrado válidas ciertas dudas sobre la seguridad de importantes fundamentos de mi concepción. Tampoco ahora ignoro la importancia y la parcial legitimidad de esas dudas. Pero no han perturbado mi confianza en la interna armonía de nuestra lógica; creo que una investigación rigurosa de la facultad creativa de nuestra mente –que a partir de determinados elementos forma un nuevo objeto determinado, su sistema, necesariamente distinto de cada uno de esos elementos– debe ciertamente conducir a una organización irreprochable de los fundamentos de mi escrito. No obstante, otros trabajos me han impedido llevar a término una investigación tan difícil, y por tanto pido indulgencia dado que mi escrito, pese a todo, aparece por tercera vez sin cambios, lo que sólo se puede justificar por el hecho de que el interés por él no se ha extinguido todavía, como muestra la continuada demanda.[10]

Braunschweig, 30 de septiembre de 1911 **R. Dedekind**

§ 1.
Sistemas de elementos.

1. En lo sucesivo entiendo por *cosa* todo objeto de nuestro pensamiento. Para poder hablar cómodamente de las cosas, se las designa mediante símbolos, por ejemplo mediante letras, y se permite hablar abreviadamente de la cosa *a* o simplemente de *a*, donde en realidad se está haciendo referencia a la cosa designada por *a*, y de ninguna manera a la propia letra *a*. Una cosa queda completamente determinada por todo aquello que se puede decir o pensar de ella. Una cosa *a* es la misma que *b* (idéntica con *b*), y *b* la misma que *a*, cuando todo lo que se puede pensar de *a* puede también pensarse de *b*, y todo lo que vale para *b* puede también pensarse de *a*. Que a y b son sólo símbolos o nombres para una y la misma cosa, se indicará mediante el símbolo $a = b$, e igualmente mediante $b = a$. Si además $b = c$, o sea si también *c*, como *a*, es un símbolo para la cosa designada con *b*, entonces $a = c$. Si la mencionada coincidencia de la cosa designada mediante *a* con la cosa designada mediante *b* no se da, decimos que estas cosas *a, b* son distintas, *a* es otra cosa que *b, b* otra cosa que *a*; existe alguna propiedad que conviene a una pero no a la otra.

2. Sucede con mucha frecuencia que distintas cosas *a, b, c*..., consideradas por cualquier motivo bajo un mismo punto de vista, son reunidas mentalmente, y se dice entonces que constituyen un *sistema S*; se llama a las cosas *a, b, c... elementos* del sistema *S*, y se dice que están *contenidas* en *S*; inversamente *S consiste* en esos elementos. Un tal sistema *S* (o un conjunto, una variedad, una totalidad)[11] es igualmente, como objeto de nuestro pensamiento, una cosa (1); queda completamente determinado cuando para cada cosa está determinado si es o no un elemento de *S*.* El sistema *S* es por tanto el mismo que el sistema *T*, simbólicamente $S = T$, cuando todo elemento de *S* es también elemento de *T*, y todo elemento de *T* lo es también de *S*. Para que la forma

* Para lo que sigue es totalmente indiferente de qué manera se establece esa determinación, y si conocemos o no alguna forma de decidir al respecto; las leyes generales que se van a desarrollar no dependen en absoluto de ello, valen en todas las circunstancias. Menciono esto expresamente porque hace poco el señor Kronecker (en el tomo 99 del *Journal für Mathematik*, pag. 334- 336) ha querido imponer a la libre construcción de conceptos en la matemática determinadas limitaciones que no considero justificadas; sin embargo, me parece que solo será conveniente extenderse más sobre el tema cuando el distinguido matemático haya hecho públicas sus razones para la necesidad o al menos para la conveniencia de esas limitaciones.

de expresión sea uniforme, es conveniente que consideremos también el caso especial en que un sistema *S* está compuesto de un *único* (un y sólo un) elemento *a*, es decir que la cosa *a* es elemento de *S* pero toda cosa distinta de *a* no es elemento de *S*. Por el contrario excluiremos aquí totalmente, por determinadas razones, el sistema vacío, que no contiene absolutamente ningún elemento, aunque para otras investigaciones puede ser cómodo imaginar algo semejante.

3. *Definición*. Se dice que un sistema *A* es *parte* de un sistema *S* cuando cada elemento de *A* es también elemento de *S*. Como en lo sucesivo tendremos que referirnos contínuamente a tales relaciones entre un sistema *A* y un sistema *S*, queremos designarlas, para abreviar, mediante el símbolo A3S. Evitaré totalmente, por claridad y simplicidad, el símbolo inverso S&A que podría servir para designar el mismo hecho, pero diré de vez en cuando, a falta de una palabra mejor, que *S* es *todo* de *A*, con lo que se expresará igualmente que entre los elementos de *S* se encuentran todos los elementos de *A*. Como además, de acuerdo con 2, cada elemento de *S* puede considerarse como un sistema, podemos emplear también aquí el símbolo *s*3*S*.[12]

4. *Teorema*. De acuerdo con 3, *A*3*A*.

5. *Teorema*. Si *A*3*B* y *B*3*A*, entonces *A*=*B*.

La demostración se sigue de 3,2.

6. *Definición*. Se dice que un sistema *A* es parte *propia* de *S* cuando *A* es parte de *S* pero distinto de *S*. Entonces (por 5) *S* no es parte de *A*, es decir (3) hay en *S* un elemento que no es elemento de *A*.

7. *Teorema*. Si *A*3*B* y *B*3*C*, lo que también se puede representar abreviadamente mediante *A*3*B*3*C*, entonces *A*3*C*, y en particular *A* será parte propia de *C* cuando *A* sea parte propia de *B* o cuando *B* sea parte propia de *C*.

La demostración se sigue de 3,6.

8. *Definición*. Por el sistema *compuesto* de cualesquiera sistemas *A*, *B*, *C*..., que se designará $\mathfrak{M}$(*A*,*B*,*C*...), se entenderá aquel sistema cuyos elementos quedan determinados a través de la siguiente prescripción: una cosa vale como elemento de $\mathfrak{M}$(*A*,*B*,*C*...) cuando y sólo cuando es elemento de cualquiera de los sistemas *A*, *B*, *C*..., es decir, cuando es elemento de *A* *o* de *B* *o* de *C*... Admitimos también el caso de que se presente un único sistema *A*; entonces claramente $\mathfrak{M}$(*A*)=*A*. Advertimos además que hay que diferenciar totalmente el sistema $\mathfrak{M}$(*A*,*B*,*C*...), compuesto de *A*, *B*, *C*..., de aquel sistema cuyos elementos son los propios sistemas *A*, *B*, *C*...

9. *Teorema*. Los sistemas *A*, *B*, *C*... son partes de $\mathfrak{M}$(*A*,*B*,*C*...).

La demostración se sigue de 8,3.

10. *Teorema*. Si *A*, *B*, *C*... son partes de un sistema *S*, entonces

$\mathfrak{M}(A,B,C...)3S$.

La demostración se sigue de 8,3.

11. *Teorema.* Si P es parte de uno de los sistemas A, B, C..., entonces $P3\mathfrak{M}(A,B,C...)$.

La demostración se sigue de 9,7.

12. *Teorema.* Si cada uno de los sistemas P, Q... es parte de uno de los sistemas A, B, C..., entonces $\mathfrak{M}(P,Q...)3\mathfrak{M}(A,B,C...)$.

La demostración se sigue de 11,10.

13. *Teorema.* Si A es compuesto de cualesquiera de los sistemas P, Q..., entonces $A3\mathfrak{M}(P,Q...)$.

Demostración. Cada elemento de A es (por 8) elemento de uno de los sistemas P, Q..., y por consiguiente (por 8) elemento de $\mathfrak{M}(P,Q...)$, de donde (por 3) se sigue el teorema.

14. *Teorema.* Si cada uno de los sistemas A, B, C... es compuesto de cualesquiera de los sistemas P, Q..., entonces

$$\mathfrak{M}(A,B,C...)3\mathfrak{M}(P,Q...).$$

La demostración se sigue de 13,10.

15. *Teorema.* Si cada uno de los sistemas P, Q... es parte de uno de los sistemas A, B, C..., y si cada uno de los últimos es compuesto de cualesquiera de los primeros, entonces

$$\mathfrak{M}(P,Q...)=\mathfrak{M}(A,B,C...).$$

La demostración se sigue de 12,14,5.

16. *Teorema.* Si $A=\mathfrak{M}(P,Q)$ y $B=\mathfrak{M}(Q,R)$, entonces $\mathfrak{M}(A,R)=\mathfrak{M}(P,B)$.

Demostración. Según el anterior teorema 15 tanto $\mathfrak{M}(A,R)$ como $\mathfrak{M}(P,B)$ es $=\mathfrak{M}(P,Q,R)$.

17. *Definición.* Se dice que una cosa g es elemento *común* de los sistemas A, B, C... cuando está contenida en cada uno de estos sistemas (por tanto en A y en B y en C...). Igualmente se dice que un sistema T es *parte común* de A, B, C... cuando T es parte de cada uno de esos sistemas, y entendemos por *comunidad* de los sistemas A, B, C... el sistema completamente determinado $\mathfrak{G}(A,B,C...)$, que consiste en todos los elementos g comunes de A, B, C..., y por consiguiente es igualmente parte común de esos mismos sistemas. Admitimos también el caso en que se presenta un único sistema A; entonces hay que poner $\mathfrak{G}(A)=A$. Puede darse también el caso de que los sistemas A, B, C... no tengan absolutamente ningún elemento común, y por tanto no posean ninguna parte común, ninguna comunidad; se llaman entonces sistemas *sin* parte común, y el símbolo $\mathfrak{G}(A,B,C...)$ carece de significado (cf. el final de 2). Sin embargo dejaremos casi siempre al lector la tarea de añadir la condición de existencia en los teoremas sobre comunidades, y la de encontrar la interpretación correcta de esos teoremas también para el caso de su no existencia.[13]

18. *Teorema*. Toda parte común de *A, B, C*... es parte de $\mathfrak{G}(A,B,C...)$.
La demostración se sigue de 17.

19. *Teorema*. Cada parte de $\mathfrak{G}(A,B,C...)$ es parte común de *A, B, C*...
La demostración se sigue de 17,7.

20. *Teorema*. Si cada uno de los sistemas *A, B, C*... es todo (por 3) de uno de los sistemas *P, Q*..., entonces
$\mathfrak{G}(P,Q...) 3 \mathfrak{G}(A,B,C...)$.

Demostración. Cada elemento de $\mathfrak{G}(P,Q...)$ es elemento común de *P, Q*..., y por tanto también elemento común de *A,B,C*..., c.q.d.[14]

§ 2.
Representación de un sistema.[15]

21. *Definición*.* Por una *representación* φ de un sistema *S* se entenderá una ley según la cual a cada elemento determinado *s* de *S* se le *asigna* una cosa determinada, que se llama la *imagen* de *s* y se designa con φ(*s*); decimos también que φ(*s*) *corresponde* al elemento *s*, que φ(*s*) *resulta* o se *produce* a partir de *s* mediante la representación φ, que *s* se *transforma* en φ(*s*) mediante la representación φ. Si ahora *T* es una parte cualquiera de S, en la representación φ de *S* está contenida igualmente una representación determinada de *T*, que para simplificar puede designarse mediante el mismo símbolo φ, y que consiste en que a cada elemento *t* del sistema *T* le corresponde la misma imagen φ(*t*) que posee t como elemento de *S*; igualmente se llama *imagen* de *T* y se designa φ(*T*) el sistema que consiste en todas las imágenes φ(*t*), con lo que también queda definido el significado de φ(*S*). La asignación de determinados signos o nombres a sus elementos puede considerarse como ejemplo de representación de un sistema. La más sencilla representación de un sistema es aquella a través de la cual cada uno de sus elementos se transforma en sí mismo; la llamaremos representación *idéntica* del sistema. Por comodidad, en los siguientes teoremas 22,23, 24, que tratan de una representación cualquiera de un sistema cualquiera *S*, designaremos las imágenes de elementos *s* y partes *T* mediante *s*' y *T*'; además establecemos que las letras latinas minúsculas y mayúsculas sin acento significarán siempre elementos y partes de ese sistema *S*.

22. *Teorema*.** Si *A*3*B*, entonces *A*'3*B*'.

* Cf. Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, tercera edición, 1879, § 163.

** Cf. teorema 27.

Demostración. Cada elemento de A' es imagen de un elemento de A, por tanto de un elemento contenido en B, y consiguientemente es elemento de B', c.q.d.

23. *Teorema*. La imagen de $\mathfrak{M}(A,B,C...)$ es $\mathfrak{M}(A',B',C',...)$.

Demostración. Si designamos mediante M el sistema $\mathfrak{M}(A,B,C,...)$, que por 10 es igualmente parte de S, cada elemento de su imagen M' es la imagen m' de un elemento m de M; como (por 8) m es también elemento de uno de los sistemas A, B, C..., y consiguientemente m' es elemento de uno de los sistemas A', B', C'..., o sea (por 8) también elemento de $\mathfrak{M}(A',B',C'...)$, entonces (por 3)

$$M' 3 \mathfrak{M}(A',B',C'...).$$

Por otro lado, como A, B, C... son (por 9) partes de M, y por tanto (por 22) A', B', C'... son partes de M', también (por 10)

$$\mathfrak{M}(A',B',C'...) 3 M'$$

y de ahí junto con lo anterior se sigue, de acuerdo con 5, el teorema a demostrar

$$M' = \mathfrak{M}(A',B',C'...).$$

24. *Teorema.** La imagen de cada parte común de A, B, C..., por tanto también la de la comunidad $\mathfrak{G}(A,B,C...)$, es parte de $\mathfrak{G}(A',B',C'...)$.

Demostración. Aquélla es por 22 parte común de A', B', C'..., de donde se sigue el teorema por 18.

25. *Definición y teorema*. Si ϕ es una representación de un sistema S, y ψ es una representación de la imagen $S' = \phi(S)$, de aquí resulta siempre una representación θ *compuesta*** de ϕ y ψ, que consiste en que a cada elemento s de S le corresponde la imagen

$$\theta(s) = \psi(s') = \psi(\phi(s))$$

donde una vez más $\phi(s) = s'$. Esa representación θ puede designarse abreviadamente por $\psi.\phi$ o $\psi\phi$, y la imagen $\theta(s)$ por $\psi\phi(s)$, donde se debe tener muy en cuenta la posición de los símbolos ϕ, ψ, porque el signo $\phi\psi$, en general, carece de significado y sólo tiene sentido cuando $\psi(S')3S$. Si ahora χ designa una representación del sistema $\psi(S') = \psi\phi(S)$, y η la representación $\chi\psi$ del sistema S' compuesta de ψ y χ, entonces $\chi\theta(s) = \chi(\psi(s')) = \eta(s') = \eta\phi(s)$, por lo que las representaciones compuestas $\chi\theta$ y $\eta\phi$ coinciden para cada elemento s de S, es decir $\chi\theta = \eta\phi$. De acuerdo con el significado de θ y η, este teorema se puede expresar convenientemente

$$\chi.\psi\phi = \chi\psi.\phi$$

y esa representación compuesta de ϕ, ψ, χ puede designarse abreviadamente $\chi\psi\phi$.

---

* Cf. teorema 29.

** No hay que temer en absoluto una confusión de esta composición de aplicaciones con la composición de sistemas de elementos (8).

§ 3.
Similaridad de una representación. Sistemas similares.

26. *Definición.* Una representación ϕ de un sistema *S* se llama *similar* (o *clara*) cuando a diferentes elementos *a,b* del sistema *S* les corresponden siempre diferentes imágenes $a'=\phi(a)$, $b'=\phi(b)$. Como en este caso de $s'=t'$ se sigue siempre, inversamente, $s=t$, cada elemento del sistema $S'=\phi(S)$ es la imagen *s'* de un elemento *s* único y completamente determinado del sistema *S*, de acuerdo con lo cual se le puede contraponer a la representación ϕ de *S* una representación *inversa* del sistema *S'*, que puede ser designada $\bar{\phi}$, que consiste en que a cada elemento *s'* de *S'* le corresponde la imagen $\bar{\phi}(s')=s$ y claramente es siempre una representación similar. Es evidente que $\bar{\phi}(S')=S$, que además ϕ es la representación inversa correspondiente a $\bar{\phi}$, y que la representación $\bar{\phi}\phi$ compuesta (25) de ϕ y $\bar{\phi}$ es la representación idéntica de *S* (21). Igualmente se deducen los siguientes complementos al § 2, manteniendo el simbolismo allí utilizado.[16]

27. *Teorema.** Si *A'*3*B'*, entonces *A*3*B*.

Demostración. Si *a* es elemento de *A*, *a'* es elemento de *A'*, y por tanto de *B'*, por lo que es $=b'$, donde *b* es elemento de *B*; pero como de $a'=b'$ siempre se sigue $a=b$, cada elemento *a* de *A* es también elemento de *B*, c.q.d.

28. *Teorema.* Si $A'=B'$, entonces $A=B$.

La demostración resulta de 27,4,5.

29. *Teorema.*** Si $G=\mathfrak{G}(A,B,C...)$, entonces $G'=\mathfrak{G}(A',B',C'...)$.

Demostración. Cada elemento de $\mathfrak{G}(A',B',C'...)$ está en cualquier caso contenido en *S'*, y por tanto es la imagen *g'* de un elemento *g* contenido en *S*; pero como *g'* es elemento común de *A',B',C'...*, *g* debe ser (por 27) elemento común de *A,B,C...*, y por tanto elemento de *G*; por lo que cada elemento de $\mathfrak{G}(A',B',C',...)$ es imagen de un elemento g de G, y por tanto elemento de G', es decir $\mathfrak{G}(A',B',C',)$3*G'*, y de aquí se sigue nuestro teorema teniendo en cuenta 24,5.

30. *Teorema.* La representación idéntica de un sistema es siempre una representación similar.

31. *Teorema.* Si ϕ es una representación similar de *S* y ψ es una representación similar de $\phi(S)$, la representación $\psi\phi$ compuesta de ϕ y ψ es en cualquier caso similar, y su correspondiente representación inversa $\overline{\psi\phi}$ es $=\bar{\phi}.\bar{\psi}$.

---

* Cf. teorema 22.

** Cf. teorema 24.

Demostración. Como a diferentes elementos a,b de S les corresponden diferentes imágenes $a'=\phi(a)$, $b'=\phi(b)$, y a éstas nuevamente diferentes imágenes $\psi(a')=\psi\phi(a)$, $\psi(b')=\psi\phi(b)$, $\psi\phi$ es una representación similar. Además cada elemento $\psi\phi(s)=\psi(s')$ del sistema $\psi\phi(S)$ se transforma mediante $\bar{\psi}$ en $s'=\phi(s)$, y éste mediante $\bar{\phi}$ en s, de modo que $\psi\phi(s)$ se transforma mediante $\bar{\phi}.\bar{\psi}$ en s, c.q.d.

32. *Definición.* Los sistemas R,S se llaman *similares* cuando existe una representación ϕ de S tal que $\phi(S)=R$, y por tanto también $\bar{\phi}(R)=S$. Claramente todo sistema es, por 30, similar a sí mismo.[17]

33. *Teorema.* Si R, S son sistemas similares, cada sistema Q similar a R es también similar a S.

Demostración. Si ϕ, ψ son representaciones similares de S, R tales que $\phi(S)=R$, $\psi(R)=Q$, $\psi\phi$ es (por 31) una representación similar de S tal que $\psi\phi(S)=Q$, c.q.d.

34. *Definición.* Por tanto se puede distribuir todos los sistemas en *clases*, reuniendo en una determinada clase aquellos y sólo aquellos sistemas Q, R, S... que son similares a un determinado sistema R, el *representante* de la clase; de acuerdo con el anterior teorema 33 la clase no cambia si se elige como representante cualquier otro sistema S perteneciente a ella.[18]

35. *Teorema.* Si R,S son sistemas similares, cada parte de S es también similar a una parte de R, cada parte propia de S también lo es a una parte propia de R.

Demostración. Si ϕ es una representación similar de S, $\phi(S)=R$, y $T3S$, por 22 el sistema similar a T es $\phi(T)3R$; si además T es parte propia de S, y s es un elemento de S no contenido en T, por 27 el elemento $\phi(s)$ contenido en R no puede estar contenido en $\phi(T)$; con lo que $\phi(T)$ es parte propia de R, c.q.d.

§ 4.
Representación de un sistema en sí mismo.

36. *Definición.* Si es una representación similar o disimilar de un sistema S y $\phi(S)$ es parte de un sistema Z, llamamos a ϕ representación de S *en* Z, y decimos que S es representado en Z mediante ϕ. De ahí que llamemos a ϕ representación del sistema S *en sí mismo* cuando $\phi(S)3S$; en este parágrafo queremos investigar las leyes generales de tal representación ϕ. Para ello manejamos los mismos símbolos que en el § 2, poniendo otra vez $\phi(s)=s'$, $\phi(T)=T'$. A consecuencia de 22,7 estas imágenes son a su vez elementos o partes de S, como todas las cosas designadas con letras latinas.

37. *Definición*. Se dice que *K* es una *cadena* cuando *K*'3*K*. Notamos expresamente que este nombre no es propio de la parte *K* del sistema *S* por sí misma, sino tan solo se le atribuye en relación con una determinada representación ϕ; respecto a otra representación del sistema *S* en sí mismo, *K* podría muy bien no ser una cadena.

38. *Teorema*. *S* es una cadena.

39. *Teorema*. La imagen *K*' de una cadena *K* es una cadena.

Demostración. De *K*'3*K* se sigue por 22 (*K*')'3*K*'. c.q.d.

40. *Teorema*. Si *A* es parte de una cadena *K*, entonces *A*'3*K*.

Demostración. De *A*3*K* se sigue (por 22) *A*'3*K*', y como (por 37) *K*'3*K*, se sigue (por 7) *A*'3*K*, c.q.d.

41. *Teorema*. Si la imagen *A*' es parte de una cadena *L*, existe una cadena *K* que satisface las condiciones *A*3*K*, *K*'3*L*; precisamente $\mathfrak{M}$(*A*,*L*) es una cadena tal.

Demostración. Sea *K*=$\mathfrak{M}$(*A*,*L*), de modo que por 9 la condición *A*3*K* se cumple. Como además por 23 K'=$\mathfrak{M}$(*A*',*L*') y hemos supuesto que *A*'3*L*, *L*'3*L*, también se cumple la otra condición *K*'3*L* (por 10), y dado que (por 9) *L*3*K*, de ahí se sigue también que *K*'3*K*, es decir, que *K* es una cadena, c.q.d.

42. *Teorema*. Un sistema *M* compuesto sólo por cadenas *A*,*B*,*C*... es una cadena.

Demostración. Como (por 23) *M*'=$\mathfrak{M}$(*A*',*B*',*C*'...) y hemos supuesto que *A*'3*A*,*B*'3*B*,*C*'3*C*..., se sigue (por 12) *M*'3*M*, c.q.d.

43. *Teorema*. La comunidad G de las cadenas *A*,*B*,*C*... es una cadena.

Demostración. Como *G* es por 17 parte común de *A*,*B*,*C*..., o sea (por 22) *G*' es parte común de *A*',*B*',*C*'..., y dado que hemos supuesto *A*'3*A*, *B*'3*B*, *C*'3*C*..., entonces (por 7) *G*' es también parte común de *A*,*B*,*C*..., y de 18 se sigue que es también parte de *G*, c.q.d.

44. *Definición*. Si *A* es cualquier parte de *S*, queremos designar con A_0 la comunidad de todas aquellas cadenas (por ejemplo *S*) de las cuales *A* es parte; esa comunidad A_0 existe (cf. 17) porque el propio *A* es ya parte común de todas esas cadenas. Como además A_0 es una cadena (por 43), queremos llamarla *cadena del sistema A* o abreviadamente cadena de *A*. También esta definición depende totalmente de la representación del sistema *S* en sí mismo que estamos suponiendo, y si más tarde se hace necesario por motivos de claridad, pondremos más bien $\phi_0(A)$ en vez de A_0, e igualmente designaremos la cadena de *A* correspondiente a otra representación ω mediante $\omega_0(A)$. Para este importantísimo concepto valen los siguientes teoremas.[19]

45. *Teorema*. *A*3A_0.

Demostración. *A* es parte común de todas aquellas cadenas de las que A_0 es la comunidad, de donde se sigue el teorema por 18.

46. *Teorema*. $(A_0)'3A_0$.

Demostración. Dado que A_0 es por 44 una cadena (37).

47. *Teorema*. Si A es parte de una cadena K, también $A_0 3K$.

Demostración. A_0 es la comunidad, y por tanto parte común, de todas las cadenas K de las que A es parte.

48. *Nota*. Es fácil convencerse de que la noción de cadena A_0 definida en 44 queda completamente caracterizada mediante los anteriores teoremas 45,46,47.

49. *Teorema*. $A'3(A_0)'$.

La demostración se sigue de 45,22.

50. *Teorema*. $A'3A_0$

La demostración se sigue de 49,46,7.

51. *Teorema*. Si A es una cadena, $A_0=A$.

Demostración. Como A es parte de la cadena A, por 47 también $A_0 3A$, de donde se sigue el teorema por 45,5.

52. *Teorema*. Si $B3A$, entonces $B3A_0$.

La demostración se sigue de 45,7.

53. *Teorema*. Si $B3A_0$, entonces $B_0 3A_0$, e inversamente.

Demostración. Como A_0 es una cadena, de $B3A_0$ se sigue (por 47) $B_0 3A_0$; inversamente, si $B_0 3A_0$, por 7 se sigue $B3A_0$, porque (por 45) $B3B_0$.

54. *Teorema*. Si $B3A$, entonces $B_0 3A_0$.

La demostración se sigue de 52,53.

55. *Teorema*. Si $B3A_0$, entonces también $B'3A_0$.

Demostración. Por 53 $B_0 3A_0$, y como (por 50) $B'3B_0$, el teorema por demostrar se sigue de 7. Lo mismo se obtiene también, como es fácil ver, de 22,46,7 o también de 40.

56. *Teorema*. Si $B3A_0$, entonces $(B_0)'3(A_0)'$.

La demostración se sigue de 53,22.

57. *Teorema y definición*. $(A_0)'=(A')_0$, es decir, la imagen de la cadena de A es igual a la cadena de la imagen de A. De ahí que se pueda designar ese sistema abreviadamente mediante A'_0, y se le puede llamar a voluntad la *cadena-imagen* o la *imagen-cadena* de A. Mediante los símbolos más claros dados en 44, el teorema se expresaría $\phi(\phi_0(A))=\phi_0(\phi(A))$.

Demostración. Poniendo para abreviar $(A')_0=L$, L es una cadena (44), y por 45 $A'3L$, con lo que (por 41) hay una cadena K que satisface las condiciones $A3K$, $K'3L$; de aquí se sigue también (por 47) $A_0 3K$, y por tanto $(A_0)'3K'$, y consiguientemente por 7 $(A_0)'3L$, es decir

$$(A_0)'3(A')_0.$$

Como además por 49 $A'3(A_0)'$, y $(A_0)'$ es por 44,39 una cadena, también (por 47)

$$(A')_0 3(A_0)',$$

de donde, junto con el resultado anterior, se sigue el teorema a demostrar (5).

58. *Teorema.* $A_0=\mathfrak{M}(A,A'_0)$, es decir que la cadena de A está compuesta de A y de la imagen-cadena de A.

Demostración. Poniendo nuevamente para abreviar

$$L=A'_0=(A_0)'=(A')_0 \text{ y } K=\mathfrak{M}(A,L),$$

entonces (por 45) $A'3L$, y como L es una cadena, por 41 vale lo mismo de K; como además $A3K$ (9), por 47 se sigue también

$$A_0 3K.$$

Por otro lado, como (por 45) $A3A_0$ y (por 46) $L3A_0$, también (por 10)

$$K3A_0,$$

de donde, en conexión con el anterior resultado, se sigue el teorema a demostrar, $A_0=K$ (5).

59. *Teorema de inducción completa.* Para demostrar que la cadena A_0 es parte de cualquier sistema Σ –sea este último parte de S o no–, basta mostrar

ρ. que $A3\Sigma$, y

σ. que la imagen de cada elemento común de A_0 y Σ es igualmente elemento de Σ.

Demostración. Si ρ es verdadero, existe siempre por 45 la comunidad $G=\mathfrak{G}(A_0,\Sigma)$, y precisamente (por 18) $A3G$; como además por 17

$$G3A_0,$$

G es también parte de nuestro sistema S, que se representa en sí mismo mediante ϕ, e igualmente se sigue (por 55) $G'3A_0$. Si σ es también cierto, es decir si $G'3\Sigma$, entonces G', como parte común de los sistemas A, Σ, debe ser (por 18) parte de su comunidad G, es decir que G es una cadena (37), y dado que, como ya se ha indicado, $A3G$, por 47 se deduce también

$$A_0 3G,$$

y de aquí junto con el anterior resultado se sigue $G=A_0$, o sea por 17 $A_0 3\Sigma$, c.q.d.

60. El teorema anterior constituye, como se mostrará más tarde, el fundamento científico para el método de prueba conocido bajo el nombre de *inducción completa* (paso de n a n+1), y se puede expresar también de la siguiente manera: Para demostrar que todos los elementos de la cadena A_0 poseen una determinada propiedad $\mathfrak{E}$ (o que el teorema $\mathfrak{S}$, en el que se trata de una cosa n indeterminada, vale realmente para todos los elementos n de la cadena A_0), basta mostrar

ρ. que todos los elementos a del sistema A poseen la propiedad $\mathfrak{E}$ (o que $\mathfrak{S}$ vale para todos los a),y

σ. que la misma propiedad $\mathfrak{E}$ conviene a la imagen n' de todo elemento n de A_0 tal que posee la propiedad $\mathfrak{E}$ (o que el teorema $\mathfrak{S}$,

en cuanto vale para un elemento n de A_0, tiene ciertamente que valer para su imagen n').

De hecho, si se designa con Σ el sistema de todas las cosas que poseen la propiedad 𝔈 (o para las cuales vale el teorema 𝔖), inmediatamente resulta evidente la coincidencia completa del modo de expresión que empleamos ahora con el utilizado en 59.

61. *Teorema.* La cadena de $\mathfrak{M}(A,B,C...)$ es $\mathfrak{M}(A_0,B_0,C_0...)$.

Demostración. Si designamos el primer sistema M, y el último K, K es por 42 una cadena. Como ahora por 45 cada uno de los sistemas $A,B,C...$ es parte de uno de los sistemas $A_0,B_0,C_0...$, con lo que (por 12) $M 3 K$, por 47 se sigue también

$$M_0 3 K.$$

Por otro lado, como por 9 cada uno de los sistemas $A,B,C..$ es parte de M, o sea por 45,7 parte de la cadena M_0, por 47 cada uno de los sistemas $A_0,B_0,C_0...$ debe ser parte de M_0, con lo que por 10

$$K 3 M_0,$$

de donde en conexión con lo anterior se sigue $M_0=K$, c.q.d.

62. *Teorema.* La cadena de $\mathfrak{G}(A,B,C...)$ es parte de $\mathfrak{G}(A_0,B_0,C_0...)$.

Demostración. Si designamos con G el primero, y con K el último sistema, K es por 43 una cadena. Como ahora cada uno de los sistemas $A_0,B_0,C_0...$ es por 45 todo de uno de los sistemas $A,B,C...$, con lo que (por 20) $G 3 K$, se sigue por 47 el teorema $G_0 3 K$ que queríamos demostrar.

63. *Teorema.* Si $K' 3 L 3 K$ de modo que K es una cadena, también L es una cadena. Si ésta es parte propia de K, y U es el sistema de todos aquellos elementos de K que no están contenidos en L, si además la cadena U_0 es parte propia de K, y V es el sistema de todos los elementos de K que no están contenidos en U_0, entonces $K=\mathfrak{M}(U_0,V)$, y $L=\mathfrak{M}(U'_0,V)$. Si finalmente $L=K'$, entonces $V 3 V'$.

La demostración de este teorema, del que (igual que de los dos anteriores) no haremos uso, puede dejarse al lector.[20]

§ 5.
Finito e infinito.

64. *Definición.** Un sistema S se llama *infinito* cuando es similar (32) a una parte propia de sí mismo; en caso contrario se llama a S sistema *finito*.

* Si no se quiere utilizar la noción de sistemas similares (32) se debe decir: S se llama infinito cuando existe una parte propia de S (6) en la que S se puede representar claramente (similarmente) (26,36). En esta forma he comunicado la definición de

65. *Teorema*. Todo sistema consistente en un único elemento es finito.

Demostración. Semejante sistema no posee absolutamente ninguna parte propia (2,6).

66. *Teorema*. Existen sistemas infinitos.

Demostración.* Mi universo mental, es decir, la totalidad S de todas las cosas que pueden ser objeto de mis pensamientos, es infinito. Porque si s designa un elemento de S, el pensamiento s', que s puede ser objeto de mi pensamiento, es también un elemento de S. Si lo consideramos como imagen $\phi(s)$ del elemento s, la representación ϕ de S así determinada tiene la propiedad de que la imagen S' es parte de S; y S' es precisamente parte propia de S, porque hay en S elementos (por ejemplo mi propio yo) que son distintos de todo pensamiento s', y por eso no están contenidos en S'. Finalmente es evidente que si a,b son diferentes elementos de S, también sus imágenes a',b' son diferentes, y que por tanto la representación ϕ es clara (similar) (26). Con lo que S es infinito, c.q.d.[21]

67. *Teorema*. Si R, S son sistemas similares, R es finito o infinito según S sea finito o infinito.

Demostración. Si S es infinito, y por tanto similar a una parte propia S' de si mismo, y si R y S son similares, S' debe ser por 33 similar a R, y por 35 debe igualmente ser similar a una parte propia de R, que entonces (por 33) debe ser similar al propio R; por lo que R es infinito, c.q.d.

68. *Teorema*. Todo sistema S que posee una parte T infinita es igualmente infinito; o con otras palabras, toda parte de un sistema finito es finita.

Demostración. Si T es infinito, o sea si hay una representación similar ψ de T tal que $\psi(T)$ es una parte propia de T, y si T es parte de S, se puede extender esa representación ψ a una representación ϕ de S poniendo, si s designa cualquier elemento de S, $\phi(s)=\psi(s)$ o $\phi(s)=s$ según s sea elemento de T o no. Esa representación ϕ es similar; pues si a,b designan distintos elementos de S, y si ambos están contenidos en T,

---

infinito, que constituye el núcleo de toda mi investigación, al señor Cantor en septiembre de 1882, y varios años antes a los señores Schwarz y Weber. Todos los demás intentos que conozco de diferenciar lo finito de lo infinito me parecen tan poco satisfactorios que creo que debo renunciar a criticarlos.

* Una consideración similar se encuentra en el § 13 de *Paradoxien des Unendlichen* de Bolzano (Leipzig 1851).

la imagen $\phi(a)=\psi(a)$ es diferente de la imagen $\phi(b)=\psi(b)$, porque ψ es una representación similar; por otro lado, si a está contenido en T y b no lo está, $\phi(a)=\psi(a)$ es diferente de $\phi(b)=b$, porque $\psi(a)$ está contenido en T; finalmente, si ni a ni b están contenidos en T, también $\phi(a)=a$ es diferente de $\phi(b)=b$, como había que mostrar. Como además $\psi(T)$ es parte de T, o sea (por 7) parte de S, es evidente que también $\phi(S)3S$. Como finalmente $\phi(T)$ es parte propia de T, hay en T, y por tanto en S, un elemento t que no está contenido en $\psi(T)=\phi(T)$; ahora, como la imagen $\phi(s)$ de cada elemento s de S no contenido en T es $=s$, y por tanto distinta de t, t no puede en absoluto estar contenido en $\phi(S)$; con lo que $\phi(S)$ es parte propia de S, y consiguientemente S es infinito, c.q.d.

69. *Teorema.* Todo sistema que es similar a una parte de un sistema finito es él mismo finito.

La demostración se sigue de 67,68.

70. *Teorema.* Si a es un elemento de S, y si el conjunto T de todos los elementos de S diferentes de a es finita, también S es finito.

Demostración. Tenemos que mostrar (por 64) que, si ϕ designa cualquier representación similar de S en sí mismo, la imagen $\phi(S)$ o S' nunca es parte propia de S, sino siempre $=S$. Claramente $S=\mathfrak{M}(a,T)$, y consiguientemente (por 23), si seguimos designando las imágenes mediante tildes, $S'=\mathfrak{M}(a',T')$, y por la similaridad de la representación ϕ, a' no está contenido en T' (26). Como además hemos supuesto que $S'3S$, tanto a' como cualquier elemento de T' debe ser, o bien $=a$ o elemento de T. Por lo tanto, cuando a no está contenido en T' –caso que queremos tratar primero–, T' debe estar $3T$ y consiguientemente tendremos $T'=T$, porque ϕ es una representación similar y T un sistema finito; y como a', según hemos observado, no está contenido en T', es decir en T, a' debe ser $=a$, y por consiguiente en este caso realmente $S'=S$, como se había afirmado. En el caso contrario, si a está contenido en T' y es por tanto la imagen b' de un elemento b contenido en T, queremos designar con U el conjunto de todos aquellos elementos u de T que son distintos de b; entonces $T=\mathfrak{M}(b,U)$ y (por 15) $S=\mathfrak{M}(a,b,U)$, y $S'=\mathfrak{M}(a',a,U')$. Determinamos ahora una nueva representación ψ de T, poniendo $\psi(b)=a'$ y en general $\psi(u)=u'$, mediante lo cual (por 23) $(T)=\mathfrak{M}(a',U')$. Claramente ψ es una representación similar, porque ϕ lo era, y porque a no está contenido en U, y por tanto tampoco a' está en U'. Como además a y cada elemento u son distintos de b, también a' y cada elemento u' deben (por la similaridad de ϕ) ser distintos de a, y consiguientemente deben estar contenidos en T; con lo que $\psi(T)3T$, y como T es finito, $\psi(T)=T$, por lo que $\mathfrak{M}(a',U')$ debe ser $=T$. Pero de aquí se sigue (por 15)

$$\mathfrak{M}(a',a,U')=\mathfrak{M}(a,T),$$

es decir, por lo anterior, $S'=S$. Por lo que también en este caso hemos dado la necesaria demostración.

§ 6.
Sistemas simplemente infinitos. Serie de los números naturales.

71. *Definición*. Un sistema *N* se llama ***simplemente infinito*** cuando existe una representación similar ϕ de *N* en sí mismo tal que *N* aparece como cadena (44) de un elemento que no está contenido en ϕ(*N*). Llamamos a ese elemento, que en lo sucesivo designaremos mediante el símbolo 1, ***elemento base*** de *N*, y decimos igualmente que el sistema simplemente infinito *N* está ***ordenado*** por la representación . Manteniendo los cómodos símbolos anteriores (§ 4) para las imágenes y cadenas, la esencia de un sistema simplemente infinito *N* consiste en la existencia de una representación ϕ de *N* y un elemento 1 que satisfacen las siguientes condiciones α, ß, γ, δ:

α. $N'3N$.

ß. $N=1_0$.

γ. El elemento 1 no está contenido en *N'*.

δ. La representación ϕ es similar.

Claramente se sigue de α,γ,δ que todo sistema simplemente infinito *N* es realmente un sistema infinito (64), porque es similar a una parte propia *N'* de sí mismo.[22]

72. *Teorema*. En cada sistema infinito *S* está contenido un sistema simplemente infinito *N*.

Demostración. Por 64 hay una representación similar ϕ de *S* tal que ϕ(*S*) o *S'* es una parte propia de S; hay por tanto un elemento 1 en *S* que no está contenido en *S'*. La cadena $N=1_0$, que corresponde a esa representación ϕ del sistema *S* en sí mismo (44), es un sistema simplemente infinito ordenado por ϕ; pues claramente se cumplen todas las condiciones características α, ß, γ, δ (71).

73. *Definición*. Si en la consideración de un sistema simplemente infinito *N* ordenado por una representación ϕ se prescinde totalmente de la peculiar naturaleza de los elementos, únicamente se retiene su diferenciabilidad y sólo se consideran las relaciones mútuas en que los pone la representación ordenadora ϕ, se llama a estos elementos ***números naturales*** o ***números ordinales*** o también ***números*** a secas, y al elemento base 1 se le llama ***número base*** de la ***serie numérica N***. Considerando esta liberación de los elementos con respecto a cualquier otro contenido (abstracción) se puede llamar a los números, con derecho, creación libre del espíritu humano. Las relaciones o leyes que

se derivan exclusivamente de las condiciones α, β, γ, δ de 71, y que por tanto son siempre las mismas en todos los sistemas ordenados simplemente infinitos, sean cuales sean los nombres que casualmente correspondan a cada uno de los elementos (cfr. 134), constituyen el objeto inmediato de la *ciencia de los números* o *aritmética*. De los conceptos y teoremas generales del § 4, sobre representación de un sistema en sí mismo, inferimos en primer lugar los siguientes teoremas fundamentales, en los que entenderemos siempre por $a,b...m,n...$ elementos de N, por $A,B,C...$ partes de N, por $a',b'...m',n'...$ $A',B',C',...$ las imágenes correspondientes que se producen mediante la representación ordenadora ϕ y que son siempre elementos o partes de N; la imagen n' de un número n se llamará también el número *sucesor* de n.

74. *Teorema*. Cada número n está contenido (por 45) en su cadena n_0, y la condición $n 3 m_0$ es equivalente (por 53) a $n_0 3 m_0$.

75. *Teorema*. A consecuencia de 57, $n'_0=(n_0)'=(n')_0$.

76. *Teorema*. A consecuencia de 46, $n'_0 3 n_0$.

77. *Teorema*. A consecuencia de 58, $n_0=\mathfrak{M}(n,n'_0)$.

78. *Teorema*. $N=\mathfrak{M}(1,N')$, y por tanto todo número distinto del número base 1 es elemento de N', es decir, imagen de un número.

La demostración se sigue de 77 y 71.

79. *Teorema*. N es la única cadena de números en la que está contenido el número base 1.

Demostración. Si 1 es elemento de una cadena de números K, por 47 la correspondiente cadena es $N3K$, y consiguientemente $N=K$, porque es trivial que $K3N$.

80. *Teorema de inducción completa (paso de n a n')*. Para probar que un teorema vale para todos los números n de una cadena m_0, basta mostrar

ρ. que vale para $n=m$, y

σ. que de la validez del teorema para un número n de la cadena m_0 se sigue siempre su validez para su sucesor n'.

Esto se deduce inmediatamente de los teoremas más generales 59 o 60. Lo más frecuente será el caso en que $m=1$, y por tanto m_0 será la serie de números N entera.

§ 7.
Números mayores y menores.

81. *Teorema*. Todo número n es distinto de su sucesor n'.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema es verdadero para el número $n=1$, porque no está contenido en N' (71), mientras que su sucesor 1', como imagen del número 1 contenido en N, es elemento de N'.

σ. Si el teorema es verdadero para el número n, y ponemos su sucesor $n'=p$, entonces n es diferente de p, de donde se sigue por 26, debido a la similaridad (71) de la representación ordenadora ϕ, que n', o sea p, es diferente de p'. Con lo que el teorema vale también para el número p sucesor de n, c.q.d.

82. *Teorema*. En la cadena-imagen n'_0 de un número n está contenida (por 74, 75) su imagen n', pero no el propio número n.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema es verdadero para $n=1$, porque $1'_0=N'$, y porque el número base 1 (por 71) no está contenido en N'.

σ. Si el teorema es verdadero para un número n, y volvemos a poner $n'=p$, entonces n no está contenido en p_0, y por tanto es diferente de todo número q contenido en p_0, de donde se sigue por la similaridad de ϕ, que n', o sea p, es diferente de todo número q' contenido en p'_0, o sea que no está contenido en p'_0. Con lo que el teorema vale también para el numero p sucesor de n, c.q.d.

83. *Teorema*. La cadena-imagen n'_0 es parte propia de la cadena n_0.

La demostración se sigue de 76,74,82.

84. *Teorema*. De $m_0=n_0$ se sigue $m=n$.

Demostración. Como (por 74) m está contenido en m_0, y (por 77)

$$m_0=n_0=\mathfrak{M}(n,n'_0),$$

si el teorema fuera falso, o sea si m fuera diferente de n, m debería estar contenido en la cadena n'_0, y consiguientemente (por 74) también $m_0 3 n'_0$, es decir $n_0 3 n'_0$; como esto contradice el teorema 83, nuestro teorema está demostrado.

85. *Teorema*. Si el número n no está contenido en la cadena de números K, entonces $K 3 n'_0$.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema es, por 78, verdadero para $n=1$.

σ. Si el teorema es verdadero para un número n, vale también para su sucesor $n'=p$; porque si p no está contenido en la cadena de números K, por 40 tampoco n puede estar contenido en K, y de acuerdo con nuestro supuesto $K 3 n'_0$; como ahora (por 77) $n'_0=p_0=\mathfrak{M}(p,p'_0)$, o sea $K 3 \mathfrak{M}(p,p'_0)$, y p no está contenido en K, debe darse $K 3 p'_0$, c.q.d.

86. *Teorema*. Si el número n no está contenido en la cadena de números K, pero sí su imagen n', entonces $K=n'_0$.

Demostración. Como n no está contenido en K, por 85 $K 3 n'_0$, y como $n' 3 K$, por 47 también $n'_0 3 K$, y consiguientemente $K=n'_0$, c.q.d.

87. *Teorema*. En cada cadena de números K hay un número k, y (por 84) sólo uno, cuya cadena k_0 es $=K$.

Demostración. Si el número base 1 está contenido en K, entonces $K=N=1_0$. En caso contrario sea Z el sistema de todos los números no

contenidos en K; como el número base 1 está contenido en Z, pero Z sólo es parte propia de la serie numérica N, Z no puede (por 79) ser una cadena, es decir Z' no puede ser parte de Z; por tanto hay en Z un número n cuya imagen n' no está contenida en Z, por lo que ciertamente está contenida en K; como además n está contenido en Z, o sea no está contenido en K, por 86 $K=n'_0$, o sea $k=n'$, c.q.d.

88. *Teorema*. Si m,n son números diferentes, entonces una y (por 83,84) sólo una de las cadenas m_0, n_0 es parte propia de la otra, y precisamente o bien $n_0 3 m'_0$, o bien $m_0 3 n'_0$.

Demostración. Si $n 3 m_0$, o sea por 74 $n_0 3 m_0$, m no puede estar contenido en n_0 (porque si no (por 74) $m_0 3 n_0$, o sea $m_0=n_0$, con lo que por 84 también sería $m=n$), y de aquí se sigue por 85 que $n_0 3 m'_0$. En caso contrario, si n no está contenido en la cadena m_0, debe darse (por 85) $m_0 3 n'_0$, c.q.d.

89. *Definición*. El número m se llama *menor* que el número n, e igualmente se llama n *mayor* que m, simbólicamente

$$m<n \text{ y } n>m,$$

cuando se cumple la condición

$$n_0 3 m'_0,$$

que por 74 también se puede expresar

$$n 3 m'_0.$$

90. *Teorema*. Si m,n son números cualesquiera, se verifica siempre uno y sólo uno de los siguientes casos λ, μ, ν:

λ. $m=n$, $n=m$, es decir $m_0=n_0$,

μ. $m<n$, $n>m$, es decir $n_0 3 m'_0$,

ν. $m>n$, $n<m$, es decir $m_0 3 n'_0$.

Demostración. Si se verifica λ (84), no puede darse μ ni ν, porque por 83 nunca $n_0 3 n'_0$. Pero si λ no se verifica, entonces por 88 uno y sólo uno de los casos μ, ν se da, c.q.d.

91. *Teorema*. $n<n'$.

Demostración. La condición para el caso ν de 90 se satisface para $m=n'$.

92. *Definición*. Para expresar que m es o bien $=n$ o bien $<n$, o sea que no es $>n$ (90), se emplean los símbolos

$$m \leq n \text{ o también } n \geq m,$$

y se dice que m es *a lo sumo igual* a n, y que n es *al menos igual* a m.

93. *Teorema*. Cada una de las condiciones

$$m \leq n, \; m<n', \; n_0 3 m_0$$

es equivalente a cada una de las demás.

Demostración. Si $m \leq n$, de λ, μ (90) se sigue siempre que $n_0 3 m_0$, porque (por 76) $m'_0 3 m_0$. Inversamente, si $n_0 3 m_0$, o sea por 74 $n 3 m_0$,

se sigue de $m_0=\mathfrak{M}(m,m'_0)$ que o bien $n=m$ o bien $n3m'_0$, o sea que $n>m$. Con lo que la condición $m\leq n$ es equivalente a n_03m_0. Por otro lado, de 22, 27, 75 se sigue que esa condición n_03m_0 es igualmente equivalente a $n'_03m'_0$, es decir (por μ en 90) equivalente a $m<n'$, c.q.d.

94. *Teorema*. Cada una de la condiciones

$$m'\leq n,\ m'<n',\ m<n$$

es equivalente a cada una de las demás.

La demostración se sigue inmediatamente de 93, si se sustituye allí m por m', y de μ en 90.

95. *Teorema*. Si $l<m$ y $m\leq n$, o si $l\leq m$ y $m<n$, entonces $l<n$. Pero si $l\leq m$ y $m\leq n$, entonces $l\leq n$.

Demostración. De las condiciones correspondientes (por 89,93) $m_03l'_0$ y n_03m_0 se sigue (por 7) $n_03l'_0$; y lo mismo se sigue también de las condiciones m_03l_0 y $n_03m'_0$, porque de acuerdo con la primera también $m'_03l'_0$. Finalmente de m_03l_0 y n_03m_0 se sigue n_03l_0, c.q.d.

96. *Teorema*. En cada parte T de N hay un y sólo un *menor* número k, es decir un número k que es menor que cualquier otro número contenido en T. Si T consiste en un solo número, éste es también el menor número de T.

Demostración. Como T_0 es una cadena (44), por 87 hay un número k cuya cadena k_0 es $=T_0$. Como de ahí se sigue (por 45,77) $T3\mathfrak{M}(k,k'_0)$, en primer lugar k mismo debe estar contenido en T (porque si no $T3k'_0$, y por 47 $T_03k'_0$, es decir que sería $k_03k'_0$, lo que es imposible por 83), y además todo número del sistema T diferente de k debe estar contenido en k'_0, es decir debe ser $>k$ (89), de donde se sigue igualmente (por 90) que hay sólo un menor número en T, c.q.d.

97. *Teorema*. El menor número de la cadena n_0 es n, y el número base 1 es el menor de todos los números.

Demostración. Por 74, 93 la condición $m3n_0$ es equivalente con $m\geq n$. O también se sigue inmediatamente de la demostración del teorema anterior, porque si allí suponemos $T=n_0$, claramente k será $=n$ (51).

98. *Definición*. Si n es un número cualquiera, designaremos con Z_n el sistema de todos los números *no mayores* que n, o sea el sistema de todos los números que *no* están contenidos en n'_0. La condición

$$m3Z_n$$

es claramente equivalente (por 92,93) con cada una de las siguientes condiciones

$$m\leq n,\ m<n',\ n_03m_0.$$

99. *Teorema*. $13Z_n$ y $n3Z_n$.

La demostración se sigue de 98 o también de 71 y 82.

100. *Teorema.* Cada una de las condiciones

$$m 3 Z_n,\ m \leq n,\ m < n',\ n_0 3 m_0,$$

que por 98 son equivalentes, es también equivalente a

$$Z_m 3 Z_n.$$

Demostración. Si $m 3 Z_n$, o sea si $m \leq n$, y si $l 3 Z_m$, o sea $l \leq m$, por 95 también $l \leq n$, es decir $l 3 Z_n$; de modo que si $m 3 Z_n$, cada elemento l del sistema Z_m es también elemento de Z_n, es decir $Z_m 3 Z_n$. Inversamente, si $Z_m 3 Z_n$, por 7 también $m 3 Z_n$, porque por 99 $m 3 Z_m$, c.q.d.

101. *Teorema.* La condiciones para los casos λ, μ, ν en 90 se pueden expresar de la siguiente manera:

λ. $m=n$, $n=m$, $Z_m=Z_n$,
μ. $m<n$, $n>m$, $Z_{m'} 3 Z_n$,
ν. $m>n$, $n<m$, $Z_{n'} 3 Z_m$.

La demostración se sigue inmediatamente de 90, si se considera que por 100 las condiciones $n_0 3 m_0$ y $Z_m 3 Z_n$ son equivalentes.

102. *Teorema.* $Z_1=1$.

Demostración. El número base 1 está (por 99) contenido en Z_1, y todo número distinto de 1 está (por 78) contenido en $1'_0$, por tanto (por 98) no está contenido en Z_1, c.q.d.

103. *Teorema.* De 98 se deduce que $N=\mathfrak{M}(Z_n, n'_0)$.

104. *Teorema.* $n=\mathfrak{G}(Z_n, n_0)$, es decir, n es el único elemento común de los sistemas Z_n y n_0.

Demostración. De 99 y 74 se sigue que n está contenido en Z_n y en n_0; pero todo elemento de la cadena n_0 diferente de n está (por 77) contenido en n'_0, o sea (por 98) no está contenido en Z_n, c.q.d.

105. *Teorema.* De 91, 98 se deduce que el número n' no está contenido en Z_n.

106. *Teorema.* Si $m<n$, Z_m es parte propia de Z_n, e inversamente.

Demostración. Si $m<n$, por 100 $Z_m 3 Z_n$, y como el número n contenido en Z_n (por 99) no puede estar contenido en Z_m (por 98), dado que $n>m$, Z_m es parte propia de Z_n. Inversamente, si Z_m es parte propia de Z_n, por 100 $m \leq n$, y como m no puede ser $=n$, dado que entonces Z_m sería $=Z_n$, debe ser $m<n$, c.q.d.

107. *Teorema.* Z_n es parte propia de $Z_{n'}$.

La demostración se sigue de 106, dado que (por 91) $n<n'$.

108. *Teorema.* $Z_{n'}=\mathfrak{M}(Z_n, n')$.

Demostración. Todo número contenido en $Z_{n'}$ es (por 98) $\leq n'$, o sea que es o bien $=n'$ o $<n'$ y, consiguientemente (por 98), es elemento de Z_n; con lo que ciertamente $Z_{n'} 3 \mathfrak{M}(Z_n, n')$. Como inversamente (por 107) $Z_n 3 Z_{n'}$ y (por 99) $n' 3 Z_{n'}$, se sigue (por 10) que

$$\mathfrak{M}(Z_n, n') 3 Z_{n'},$$

de donde (por 5) resulta nuestro teorema.

109. *Teorema*. La imagen Z'_n del sistema Z_n es parte propia del sistema $Z_{n'}$.

Demostración. Todo número contenido en Z'_n es la imagen m' de un número m contenido en Z_n, y como $m \leq n$, o sea (por 94) $m' \leq n'$, se sigue (por 98) que $Z'_n 3 Z_{n'}$. Como además el número 1 está contenido en $Z_{n'}$ (por 99) pero no puede estar contenido en la imagen Z'_n (por 71), Z'_n es parte propia de $Z_{n'}$, c.q.d.

110. *Teorema*. $Z_{n'} = \mathfrak{M}(1, Z'_n)$.

Demostración. Todo número del sistema $Z_{n'}$ diferente de 1 es por 78 la imagen m' de un número m, y este debe ser $\leq n$, o sea (por 98) debe estar contenido en Z_n (porque, si no, $m > n$, o sea por 94 también $m' > n'$, con lo que (por 98) m' no estaría contenido en $Z_{n'}$); pero de $m 3 Z_n$ se sigue $m' 3 Z'_n$, y de ahí se deduce

$$Z_{n'} 3 \mathfrak{M}(1, Z'_n).$$

Como inversamente (por 99) $1 3 Z_{n'}$ y (por 109) $Z'_n 3 Z_{n'}$, se sigue (por 10) $\mathfrak{M}(1, Z'_n) 3 Z_{n'}$, y de aquí resulta nuestro teorema por 5.

111. *Definición*. Si en un sistema E de números hay un elemento g que es mayor que cualquier otro número contenido en E, se dice que g es el *mayor* número del sistema E, y claramente (por 90) sólo puede haber un número mayor en E. Si un sistema consiste en un único número, éste mismo es el mayor número del sistema.

112. *Teorema*. De 98 se deduce que n es el mayor número del sistema Z_n.

113. *Teorema*. Si en E hay un mayor número g, $E 3 Z_g$.

Demostración. Todo número contenido en E es $\leq g$, con lo que (por 98) está contenido en Z_g, c.q.d.

114. *Teorema*. Si E es parte de un sistema Z_n, o lo que es lo mismo, si hay un número n tal que todos los números contenidos en E son $\leq n$, E posee un mayor número g.

Demostración. El sistema de todos los números p que satisfacen la condición $E 3 Z_p$ –y hemos supuesto que tales números existen– es una cadena (37), porque por 107,7 se sigue también $E 3 Z_{p'}$, y por tanto es (por 87) $= g_0$, donde g designa el menor de esos números (96,97). Por tanto, también $E 3 Z_g$, y consiguientemente (98) todo número contenido en E es $\leq g$, y sólo nos queda mostrar que el propio número g está contenido en E. Esto es inmediatamente claro si $g=1$, porque entonces (por 102) Z_g y el propio E consisten en el único número 1. Pero si g es distinto de 1 y consiguientemente (por 78) es la imagen f' de un número f, por 108 $E 3 \mathfrak{M}(Z_f, g)$; si ahora g no estuviera contenido en E, debería ser $E 3 Z_f$, por lo que habría entre los números p un número f que sería (por 91) $< g$, lo que contradice lo anterior; con lo que g está contenido en E, c.q.d.

115. *Definición*. Si $l<m$ y $m<n$, decimos que el número *m* ***está entre*** *l* y *n* (también entre *n* y *l*).

116. *Teorema*. No hay ningún número que esté entre *n* y *n*'.

Demostración. En cuanto *m* es $<n'$, o sea (por 93) $m \leq n$, por 90 no puede ser $n<m$, c.q.d.

117. *Teorema*. Si *t* es un número de *T*, pero no el menor (96), hay en *T* un y sólo un número ***inmediatamente menor*** *s*, es decir un número *s* tal que $s<t$ y que no hay en *T* ningún número que esté entre *s* y *t*. Igualmente hay en *T* siempre, si *t* no es el mayor número de *T* (111), un y sólo un número ***inmediatamente mayor*** *u*, es decir un número *u* tal que $t<u$ y que no hay en *T* ningún número que esté entre *t* y *u*. Del mismo modo, *t* es en *T* inmediatamente mayor que *s* e inmediatamente menor que *u*.

Demostración. Si *t* no es el menor número de *T*, sea *E* el sistema de todos aquellos números de *T* que son $<t$; entonces (por 98) $E3Z_t$, y consiguientemente (114) hay en *E* un mayor número *s*, que claramente posee las propiedades mencionadas en el teorema y es también el único número tal. Si además *t* no es el mayor número de *T*, por 96 hay ciertamente, entre todos los números de *T* que son $>t$, un menor número *u* que posee las propiedades mencionadas en el teorema, y es el único que las posee. Igualmente clara es la corrección de la consideración final del teorema.

118. *Teorema*. En *N*, el número *n*' es inmediatamente mayor que *n*, y *n* es inmediatamente menor que *n*'.

La demostración se sigue de 116,117.

§ 8.
Partes finitas e infinitas de la serie numérica.

119. *Teorema*. Todo sistema Z_n (98) es finito.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema es verdadero para $n=1$ por 65,102.

σ. Si Z_n es finito, se sigue de 108 y 70 que también $Z_{n'}$ es finito,c.q.d.

120. *Teorema*. Si *m,n* son números distintos, Z_m,Z_n son sistemas disimilares.

Demostración. Por simetría podemos suponer (según 90) que $m<n$; entonces Z_m es por 106 parte propia de Z_n, y como Z_n es por 119 finito, por 64 Z_m y Z_n no pueden ser similares, c.q.d.

121. *Teorema*. Toda parte *E* de la serie numérica *N* que posee un mayor número (111) es finita.

La demostración se sigue de 113,119,68.

122. *Teorema*. Toda parte *U* de la serie numérica *N* que no posee ningún mayor número es simplemente infinita (71).

Demostración. Si u es un número cualquiera de U, por 117 hay un número en U y sólo uno que es inmediatamente mayor que u, número que consideraremos como la imagen de u y designaremos $\psi(u)$. La representación del sistema U, que queda así completamente determinada, tiene claramente la propiedad

α. $\psi(U) 3 U$,

es decir, U es representado en sí mismo por ψ. Si además u, v son números diferentes de U, suponemos por simetría (según 90) que $u<v$; entonces se sigue de la definición de ψ (por 117) que $\psi(u) \leq v$ y $v<\phi(v)$, de donde (por 95) $\psi(u)<\psi(v)$; con lo que las imágenes $\psi(u)$, $\psi(v)$ son (por 90) distintas, es decir

δ. la representación es similar.

Si además u_1 designa el menor número (96) del sistema U, todo número contenido en U es $u \geq u_1$, y como en general $u<\psi(u)$, por 95 $u_1<\psi(u)$, por lo que u_1 es (por 90) diferente de (u), es decir

γ. el elemento u_1 de U no está contenido en $\psi(U)$.

Con lo que $\psi(U)$ es parte propia de U, y consiguientemente U es por 64 un sistema infinito. Si ahora, en concordancia con 44, y supuesto que V es cualquier parte de U, designamos mediante $\psi_0(V)$ la cadena de V correspondiente a la representación , queremos mostrar finalmente que

ß. $U=\psi_0(u_1)$.

De hecho, toda cadena $\psi_0(V)$ es, de acuerdo con su definición (44), parte del sistema U representado por ψ en sí mismo, de modo que trivialmente $\psi_0(u_1) 3 U$; inversamente, en primer lugar está claro por 45 que el elemento u_1 de U está contenido en $\psi_0(u_1)$; pero supongamos que hubiera en U elementos que no estuvieran contenidos en $\psi_0(u_1)$, entonces deberá haber entre ellos por 96 un menor número w, y como este es, por lo anterior, diferente del menor número u_1 del sistema U, por 117 debe haber en U también un número v inmediatamente menor que w, de donde se sigue igualmente que $w=\psi(v)$; como $v<w$, de acuerdo con la definición de w, v debe ciertamente estar contenido en $\psi_0(u_1)$; pero de aquí se sigue por 55 que también $\psi(v)$, es decir w, debe estar contenido en $\psi_0(u_1)$, y como esto contradice la definición de w, nuestro supuesto anterior es inadmisible; con lo que $U 3 \psi_0(u_1)$ y consiguientemente también $U=\psi_0(u_1)$, como habíamos afirmado. De α, ß, γ, δ se deduce por 71 que U es un sistema simplemente infinito ordenado por ψ, c.q.d.

123. *Teorema.* A consecuencia de 121,122, cualquier parte T de la serie numérica N es finita o simplemente infinita según haya o no en T un mayor número.

§ 9.
Definición de una representación de la serie numérica por inducción.

124. También en lo que sigue designamos los números mediante letras latinas minúsculas, y conservamos absolutamente todos los signos de los anteriores § 6 a 8, mientras que Ω designa un sistema cualquiera cuyos elementos no necesariamente están contenidos en *N*.

125. *Teorema.* Dada una representación θ cualquiera (similar o disimilar) del sistema Ω en sí mismo, y además un elemento determinado ω de Ω, a cada número n le corresponde una y sólo una representación ψ_n del correspondiente sistema Z_n, definido en 98, que satisface las condiciones*

I. $\psi_n(Z_n)3\Omega$,

II. $\psi_n(1)=\omega$,

III. $\psi_n(t')=\theta\psi_n(t)$, si $t<n$, donde el signo $\theta\psi_n$ tiene el significado que se le dio en 25.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema es verdadero para $n=1$. En este caso (por 102) el sistema Z_n consiste en el único número 1, y la representación ψ_1 queda por tanto definida completamente por II, de tal modo que I es satisfecha y III desaparece.

σ. Si el teorema es verdadero para un número n, mostramos que también es válido para su sucesor $n'=p$, y empezamos con la prueba de que sólo puede haber una única representación correspondiente ψ_p del sistema Z_p. De hecho, si una representación ψ_p satisface las condiciones

I'. $\psi_p(Z_p)3\Omega$,

II'. $\psi_p(1)=\omega$,

III'. $\psi_p(m')=\theta\psi_p(m)$, si $m<p$,

entonces, dado que $Z_n 3 Z_p$ (107), en ella está contenida también (por 21) una representación de Z_n que claramente satisface las mismas condiciones I, II, III que ψ_n, y por consiguiente coincide totalmente con ψ_n; para todos los números contenidos en Z_n, es decir (98), para todos los números m que son $<p$, o sea $\leq n$, debe darse por tanto

$$\psi_p(m)=\psi_n(m) \qquad (m)$$

de donde se sigue también como caso especial

$$\psi_p(n)=\psi_n(n); \qquad (n)$$

---

* Por claridad, aquí y en el siguiente teorema 126 menciono por separado la condición I, aunque propiamente se trata ya de una consecuencia de II y III.

como además p (por 105,108) es el único número del sistema Z_p no contenido en Z_n, y como por III' y (n) también debe darse

$$\psi_p(p)=\theta\psi_n(n), \qquad (p)$$

se obtiene la corrección de nuestra afirmación anterior, que sólo puede haber una única representación ψ_p del sistema Z_p que satisfaga las condiciones I', II', III', porque ψ_p se reduce completamente a ψ_n a través de las condiciones arriba deducidas (m) y (p). Tenemos que mostrar ahora que, inversamente, esa representación ψ_p del sistema Z_p determinada completamente por (m) y (p) satisface realmente las condiciones I', II', III'. Claramente se deduce I' de (m) y (p) considerando I, y dado que $\theta(\Omega)3\Omega$. Igualmente, de (m) y II se sigue II', porque el número 1 está contenido en Z_n (por 99). La corrección de III' se sigue, en primer lugar, de (m) y III para aquellos números m que son $<n$, y se deduce de (p) y (n) para el único número restante $m=n$. Con esto queda completamente establecido que de la validez de nuestro teorema para el número n se sigue siempre la validez para su sucesor p, c.q.d.

126. *Teorema de definición por inducción.* Dada una representación cualquiera θ (similar o disimilar) de un sistema Ω en sí mismo y un determinado elemento ω de Ω, hay una y sólo una representación de la serie numérica N que satisface las condiciones

I. $\psi(N)3\Omega$,

II. $\psi(1)=\omega$,

III. $\psi(n')=\theta\psi(n)$, donde n designa un número cualquiera.

Demostración. Si realmente se da una tal representación ψ, en ella se contiene (por 21) una representación ψ_n del sistema Z_n que satisface las condiciones I, II, III dadas en 125, y entonces, como siempre hay una y sólo una representación ψ_n, necesariamente

$$\psi(n)=\psi_n(n). \qquad (n)$$

Como queda así completamente determinada,se sigue que sólo puede darse una tal representación ψ (cfr. el final de 130). Que inversamente la representación ψ determinada mediante (n) satisface también nuestras condiciones I, II, III, se sigue con facilidad de (n), teniendo en cuenta las propiedades I, II y (p) demostradas en 125, c.q.d.

127. *Teorema.* Bajo los supuestos del teorema anterior,

$$\psi(T')=\theta\psi(T),$$

donde T designa cualquier parte de la serie numérica N.

Demostración. Si t es cualquier número del sistema T, $\psi(T')$ consiste en todos los elementos $\psi(t')$,y $\theta\psi(T)$ consiste en todos los elementos $\theta\psi(t)$; de aquí se sigue nuestro teorema, porque (por III en 126) $\psi(t')=\theta\psi(t)$.

128. *Teorema.* Manteniendo los mismos supuestos y designando con θ_0 las cadenas que corresponden a la representación θ del sistema Ω en sí mismo,

$$\psi(N)=\theta_0(\omega).$$

Demostración. Mostramos en primer lugar por inducción completa (80) que

$$\psi(N) 3 \theta_0(\omega),$$

es decir, que cada imagen $\psi(n)$ es también elemento de $\theta_0(\omega)$. De hecho,

ρ. ese teorema es verdadero para $n=1$, porque (por 126.II) $\psi(1)=\omega$, y porque (por 45) $\omega 3 \theta_0(\omega)$.

σ. Si el teorema es verdadero para un número n, o sea si $\psi(n) 3 \theta_0(\omega)$, por 55 también $\theta(\psi(n)) 3 \theta_0(\omega)$, es decir (por 126.III) $\psi(n') 3 \theta_0(\omega)$, de modo que el teorema vale también para su sucesor n', c.q.d.

Para demostrar que además cada elemento ν de la cadena $\theta_0(\omega)$ está contenido en $\psi(N)$, o sea que

$$\theta_0(\omega) 3 \psi(N),$$

aplicamos igualmente la inducción completa, a saber el teorema 59 transferido a Ω y a la representación θ. De hecho,

ρ. el elemento ω es $=\psi(1)$, o sea está contenido en $\psi(N)$.

σ. Si ν es un elemento común de la cadena $\theta_0(\omega)$ y del sistema $\psi(N)$, entonces $\nu=\psi(n)$, donde n designa un número, y de ahí se sigue (por 126.III) $\theta(\nu)=\theta\psi(n)=\psi(n')$, con lo que también $\theta(\nu)$ está contenido en $\psi(N)$, c.q.d.

De los teoremas que hemos demostrado, $\psi(N) 3 \theta_0(\omega)$ y $\theta_0(\omega) 3 \psi(N)$ se sigue (por 5) que $\psi(N)=\theta_0(\omega)$, c.q.d.

129. *Teorema*. Bajo los mismos supuestos vale en general

$$\psi(n_0)=\theta_0(\psi(n)).$$

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema vale para $n=1$ de acuerdo con 128, porque $1_0=N$ y $\psi(1)=\omega$.

σ. Si el teorema es verdadero para un número n, se sigue

$$\theta(\psi(n_0))=\theta(\theta_0(\psi(n)));$$

como ahora por 127,75

$$\theta(\psi(n_0))=\psi(n'_0),$$

y como por 57,126.III

$$\theta(\theta_0(\psi(n)))=\theta_0(\theta(\psi(n)))=\theta_0(\psi(n')),$$

se deduce que

$$\psi(n'_0)=\theta_0(\psi(n')),$$

es decir, que el teorema vale también para el número n' sucesor de n, c.q.d.

130. *Nota*. Antes de pasar a las aplicaciones más importantes del teorema de definición por inducción demostrado en 126 (§ 10 a 14), vale la pena llamar la atención sobre una circunstancia por la que aquél se diferencia esencialmente del teorema de demostración por inducción probado en 80, o mejor ya en 59,60, por cercano que parezca ser el

parentesco entre ambos. Pues mientras que el teorema 59 vale en general para toda cadena A_0, donde A es cualquier parte de un sistema S representado en sí mismo por una representación ϕ cualquiera (§ 4), sucede algo muy diferente con el teorema 126, que sólo afirma la existencia de una representación no contradictoria (o unívoca) del sistema simplemente infinito 1_0. Si en este último teorema (manteniendo las suposiciones sobre Ω y θ) quisiéramos poner en lugar de la serie numérica 1_0 una cadena cualquiera A_0 de un sistema S, y definir una representación ψ de A_0 en Ω, de manera similar a 126.II, III, estableciendo que

ρ. a cada elemento a de A le corresponda un elemento determinado $\psi(a)$ tomado de Ω, y que

σ. para cada elemento n contenido en A_0 y su imagen $n'=\phi(n)$ valga la condición $\psi(n')=\theta\psi(n)$,

sucedería muy a menudo que no existe en absoluto una tal representación , porque las propias condiciones ρ, σ pueden entrar en contradicción una con otra, incluso si desde un principio se limita la libertad de elección contenida en ρ para adecuarla a la condición σ. Bastará un ejemplo para convencerse de ello. Si el sistema S compuesto de los elementos a y b, distintos entre sí, se representa en sí mismo mediante ϕ de tal manera que $a'=b$ y $b'=a$, entonces claramente $a_0=b_0=S$; sea además el sistema Ω compuesto de los elementos α, β, γ, distintos entre sí, representado mediante θ en sí mismo de tal manera que $\theta(\alpha)=\beta$, $\theta(\beta)=\gamma$, $\theta(\gamma)=\alpha$; si postulamos una representación ψ de a_0 en Ω tal que $\psi(a)=\alpha$ y además para cada elemento n contenido en a_0 se cumpla siempre $\psi(n')=\theta\psi(n)$, llegaremos a una contradicción; porque para $n=a$ se deduce $\psi(b)=\theta(\alpha)=\beta$, y de aquí se sigue para $n=b$ que debería cumplirse $\psi(a)=\theta(\beta)=\gamma$, cuando por el contrario teníamos $\psi(a)=\alpha$.

Pero si hay una representación ψ de A_0 en Ω que satisface las anteriores condiciones ρ y σ sin contradicción, se sigue facilmente (por 60) que de ese modo queda completamente determinada; porque si la representación χ satisface las mismas condiciones, tendremos siempre $\chi(n)=\psi(n)$, dado que esta proposición, de acuerdo con ρ, vale para todos los elementos $n=a$ contenidos en A, y porque si vale para un elemento n de A_0, de acuerdo con σ debe valer también para su imagen n'.

131. Para iluminar el alcance de nuestro teorema 126, queremos incluir aquí una observación que es útil también para otras investigaciones, por ejemplo para la llamada teoría de grupos.

Consideramos un sistema Ω cuyos elementos toleran una determinada composición tal que de un elemento surge siempre, por acción de un elemento ω, un determinado elemento del mismo sistema Ω, que puede ser designado mediante $\omega.\nu$ o $\omega\nu$ y que en general hay que

diferenciar de $\nu\omega$. Esto se puede concebir también en el sentido de que a cada elemento ω le corresponde una determinada representación del sistema Ω en sí mismo que designaremos $\dot{\omega}$, ya que cada elemento ν determina la imagen $\dot{\omega}(\nu)=\omega\nu$. Si se aplica a este sistema Ω y a su elemento ω el teorema 126, reemplazando igualmente la representación que allí designábamos θ por $\dot{\omega}$, entonces a cada número n le corresponde un determinado elemento $\psi(n)$ contenido en Ω, que podemos designar ahora mediante el símbolo ω^n y al que a veces se llama la n-ésima potencia de ω; esta noción queda completamente determinada imponiendo las condiciones

II. $\omega^1=\omega$,

III. $\omega^{n'}=\omega\omega^n$,

y su existencia queda asegurada por la demostración del teorema 126.

Si además la anterior composición de elementos está constituida de tal modo que para cualesquiera elementos μ,ν,ω siempre $\omega(\nu\mu) = (\omega\nu)\mu$, valen también los teoremas

$$\omega^{n'}=\omega^n\omega, \quad \omega^m\omega^n=\omega^n\omega^m,$$

cuyas demostraciones son fáciles de establecer por inducción completa (80) y pueden dejarse al lector.

La anterior consideración general se puede aplicar inmediatamente al siguiente ejemplo. Si S es un sistema de elementos cualesquiera, y Ω es el correspondiente sistema, cuyos elementos son la totalidad de las representaciones ν de S en sí mismo (36), entonces por 25 estos elementos se pueden siempre componer, porque $\nu(S)3S$, y la propia representación $\omega\nu$ compuesta de ν y ω es a su vez elemento de Ω. También son representaciones de S en sí mismo todos los elementos ω^n, y se dice que se forman por repetición de la representación ω. Queremos ahora poner de relieve una sencilla relación que hay entre estas nociones y el concepto definido en 44 de la cadena $\omega_0(A)$, donde A designa una vez más cualquier parte de S. Designando para abreviar mediante A_n la imagen $\omega^n(A)$ producida por la representación ω^n, de III, 25 se sigue que $\omega(A_n)=A_{n'}$. De aquí se deduce facilmente por inducción completa (80) que todos esos sistemas A_n son partes de la cadena $\omega_0(A)$; porque

ρ. según 50 esa afirmación vale para $n=1$, y

σ. si vale para un número n, de 55 y de $A_{n'}=\omega(A_n)$ se sigue que también vale para el sucesor n', c.q.d.

Como además por 45 $A3\omega_0(A)$, se deduce de 10 que también el sistema K compuesto de A y de todas las imágenes A_n es parte de $\omega_0(A)$. Inversamente, como $\omega(K)$ se compone (por 23) de $\omega(A)=A_1$ y de todos los sistemas $\omega(A_n)=A_{n'}$, y de este modo se compone (por 78) de todos los sistemas A_n, que por 9 son partes de K, entonces (por 10) $\omega(K)3K$, es decir que K es una cadena (37), y como (por 9) $A3K$, se sigue (por

47) que también $\omega_0(A)3K$. Con lo que $\omega_0(A)=K$, es decir que se cumple el siguiente teorema: Si ω es una representación de un sistema S en sí mismo, y A es cualquier parte de ese sistema, la cadena de A correspondiente a la representación ω está compuesta de A y de todas las imágenes $\omega^n(A)$ obtenidas por repetición de ω. Recomendamos al lector que vuelva, con esta idea de cadena, a las anteriores proposiciones 57,58.

§ 10.
La clase de los sistemas simplemente infinitos.[23]

132. *Teorema*. Todos los sistemas simplemente infinitos son similares a la serie numérica N y por tanto (por 33) son similares entre sí.

Demostración. Sea el sistema simplemente infinito Ω ordenado por la representación θ (71), y sea ω el elemento que hace de elemento base de Ω; si designamos otra vez con θ_0 las cadenas (44) correspondientes a la representación θ, por 71 vale lo siguiente:

α. $\theta(\Omega)3\Omega$.

ß. $\Omega=\theta_0(\omega)$.

γ. ω no está contenido en $\theta(\Omega)$.

δ. la representación θ es similar.

Si ahora ψ designa la representación de la serie numérica N definida en 126, se sigue en primer lugar de ß y 126

$$\psi(N)=\Omega,$$

y por tanto ya sólo tenemos que mostrar (por 32) que ψ es una representación similar, es decir (26) que a distintos números m,n corresponden imágenes también distintas $\psi(m),\psi(n)$. Por simetría podemos suponer (según 90) que sea $m>n$, o sea $m3n'_0$, y el teorema que queremos demostrar se transforma en que $\psi(n)$ no está contenido en $\psi(n'_0)$, o sea (por 127) que no está contenido en $\theta\psi(n_0)$. Esto lo probamos para cada número n por inducción completa (80). De hecho,

ρ. ese teorema vale para $n=1$ por γ, porque $\psi(1)=\omega$ y $\psi(1_0)=\psi(N)=\Omega$.

σ. Si el teorema es verdadero para un número n, vale para su sucesor n'; porque si $\psi(n')$, o sea $\theta\psi(n)$, estuviera contenido en $\theta\psi(n'_0)$, $\psi(n)$ debería también (por δ y 27) estar contenido en $\psi(n'_0)$, cuando nuestro supuesto dice exactamente lo contrario, c.q.d.

133. *Teorema*. Todo sistema que es similar a un sistema simplemente infinito, y por tanto (por 132,33) a la serie numérica N, es simplemente infinito.

Demostración. Si Ω es un sistema similar a la serie numérica N, por 32 hay una representación similar ψ de N tal que

$$\text{I. } \psi(N)=\Omega;$$

ponemos entonces

II. $\psi(1)=\omega$.

Si (por 26) designamos con $\overline{\psi}$ la representación inversa de Ω, que es igualmente similar, a cada elemento ν de Ω corresponde un determinado número $\overline{\psi}(\nu)=n$, a saber, aquel cuya imagen es $\psi(n)=\nu$. Como ahora a este número corresponde un determinado sucesor $\phi(n)=n'$, y a éste de nuevo un determinado elemento $\psi(n')$ de Ω, a cada elemento ν del sistema Ω le corresponde también un determinado elemento $\psi(n')$ del mismo sistema, que queremos designar $\theta(\nu)$ por ser la imagen de ν. Así queda completamente determinada una representación θ de Ω en sí mismo,* y para probar nuestro teorema mostraremos que Ω queda ordenado por θ como un sistema simplemente infinito (71), es decir, que se satisfacen todas las condiciones α, ß, γ, δ dadas en la demostración de 132. En primer lugar, α se deduce inmediatamente de la definición de θ. Como además a cada número n corresponde un elemento $\nu=\psi(n)$ para el cual $\theta(\nu)=\psi(n')$, en general

III. $\psi(n')=\theta\psi(n)$,

y de aquí junto con I, II, α se sigue que las representaciones θ, ψ satisfacen todas las condiciones del teorema 126; con lo que ß se sigue de 128 y I. Por 127 y I es además

$$\psi(N')=\theta\psi(N)=\theta(\Omega),$$

y de aquí junto con II y la similaridad de la representación ψ se sigue γ, porque si no $\psi(1)3\psi(N')$, o sea (por 27) el número 1 debería estar contenido en N', lo que (por 71.γ) no es el caso. Finalmente si μ, ν designan elementos de Ω y m,n los correspondientes números cuyas imágenes son $\psi(m)=\mu$ y $\psi(n)=\nu$, del supuesto $\theta(\mu)=\theta(\nu)$ se sigue por lo anterior que $\psi(m')=\psi(n')$, y de aquí por la similaridad de ψ y θ que $m'=n'$, $m=n$, o sea que también $\mu=\nu$; con lo que también vale δ, c.q.d.

134. *Nota*. De acuerdo con los dos teoremas precedentes 132,133, todos los sistemas simplemente infinitos constituyen una clase en el sentido de 34. Igualmente resulta evidente, considerando 71, 73, que todo teorema sobre los números, es decir sobre los elementos n del sistema simplemente infinito N ordenado por la representación ϕ, a saber, aquellos teoremas en los que se prescinde completamente de las características particulares de los elementos n y sólo se trata de aquellas nociones que se basan en la ordenación ϕ, poseen validez general también para cualquier otro sistema simplemente infinito Ω ordenado por una representación ϕ y para sus elementos ν, y que

* Claramente θ es la aplicación $\psi\phi\overline{\psi}$ compuesta (por 25) de $\overline{\psi}$, ϕ y ψ.

la transferencia de N a Ω (por ejemplo, también la traducción de un teorema aritmético de una lengua a otra) sucede gracias a la representación ψ considerada en 132, 133, que transforma cada elemento n de N en un elemento ν de Ω, a saber $\psi(n)$. A este elemento se le puede llamar el n-ésimo elemento de Ω, y por eso el propio número n es el n-ésimo número de la serie numérica N. La misma significación que tiene la representación ϕ para las leyes del dominio N, en tanto que a cada elemento n le sigue un determinado elemento $\phi(n)=n'$, corresponde para las mismas leyes en el dominio Ω, de acuerdo con la transformación operada por ψ, a la representación θ, en tanto que al elemento $\nu=\psi(n)$ formado por transformación de n le sigue el elemento $\theta(\nu)=\psi(n')$ formado por transformación de n'; por eso tenemos derecho a decir que ϕ es transformada por ψ en θ, lo que se representa simbólicamente $\theta=\psi\theta\bar{\psi}$, $\phi=\bar{\psi}\phi\psi$. Con estas notas queda, creo, completamente justificada la definición del concepto de número establecida en 73. Pasamos ahora a ulteriores aplicaciones del teorema 126.

§ 11.
Adición de los números.

135. *Definición.* Es natural aplicar la definición de una representación de la serie numérica N establecida en 126, o de la *función* $\psi(n)$ determinada por la misma, al caso en que el sistema allí designado por Ω, en el que debe estar contenida la imagen $\psi(N)$, es la propia serie numérica N, porque para este sistema Ω ya está dada una representación θ de Ω en sí mismo, a saber, aquella representación ϕ mediante la cual N está ordenado como un sistema simplemente infinito (71,73). Por tanto, será entonces $\Omega=N$, $\theta(n)=\phi(n)=n'$, con lo que

I. $\psi(N) 3 N$,

y sólo queda, para determinar ψ completamente, elegir a voluntad el elemento ω de Ω, es decir, de N. Si tomamos $\omega=1$, está claro que ψ será la representación idéntica (21) de N, porque las condiciones

$$\psi(1)=1, \ \psi(n')=(\psi(n))'$$

son satisfechas en general por $\psi(n)=n$. Por tanto, si hay que producir otra representación ψ de N, se debe elegir para ω un número distinto de 1, que por 78 estará contenido en N', esto es, un número m', donde m designa un número cualquiera; como la representación ψ depende claramente de la elección de ese número, designamos la correspondiente imagen $\psi(n)$ de un número n cualquiera mediante el símbolo $m+n$ y llamamos a este número la *suma* formada a partir del número m por *adición* del número n, o brevemente la suma de los números m y n.

Esta queda, según 126, completamente determinada mediante las condiciones*

II. $m+1=m'$,

III. $m+n'=(m+n)'$.

136. *Teorema.* $m'+n=m+n'$.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema es verdadero para $n=1$, porque (por 135.II)

$$m'+1=(m')'=(m+1)'$$

y (por 135.III) $(m+1)'=m+1'$.

σ. Si el teorema es verdadero para un número n, y ponemos su sucesor $n'=p$, entonces $m'+n=m+p$, por lo que también $(m'+n)'=(m+p)'$, de donde (por 135.III) se sigue que $m'+p=m+p'$; con lo que el teorema vale también para el sucesor p, c.q.d.

137. *Teorema.* $m'+n=(m+n)'$.

La demostración se sigue de 136 y 135.III.

138. *Teorema.* $1+n=n'$.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema es verdadero para $n=1$ por 135.II.

σ. Si el teorema vale para un número n, y ponemos $n'=p$, entonces $1+n=p$, por lo que $(1+n)'=p'$, de modo que (por 135.III) $1+p=p'$, es decir que el teorema vale también para el sucesor p, c.q.d.

139. *Teorema.* $1+n=n+1$.

La demostración se sigue de 138 y 135.II.

140. *Teorema.* $m+n=n+m$.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. Por 139 el teorema es verdadero para $n=1$.

σ. Si el teorema es válido para un número n, se sigue de ello que también $(m+n)'=(n+m)'$, es decir (por 135.III) que $m+n'=n+m'$, con lo que (por 136) $m+n'=n'+m$; de modo que el teorema vale también para el sucesor n', c.q.d.

141. *Teorema.* $(l+m)+n = l+(m+n)$.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema es verdadero para $n=1$, porque (por 135.II, III, II) $(l+m)+1 = (l+m)' = l+m' = l+(m+1)$.

* La anterior definición de la adición, basada inmediatamente en el teorema 126, me parece la más fácil. Sin embargo, utilizando la noción desarrollada en 131 se puede definir también la suma m+n mediante $\phi^n(m)$ o mediante $\phi^m(n)$, donde ϕ tiene una vez más el sentido anterior. Para establecer la coincidencia completa de estas definiciones con la anterior solo se necesita probar (según 126) que, si designamos $\phi^n(m)$ o $\phi^m(n)$ mediante $\psi(n)$, se satisfacen las condiciones $\psi(1)=m'$, $\psi(n')=\phi\psi(n)$, lo que se consigue facilmente por inducción completa (80), con ayuda de 131.

σ. Si el teorema es válido para un número n, de ahí se sigue también $((l+m)+n)' = (l+(m+n))'$, es decir (por 135.III) que

$$(l+m)+n' = l+(m+n)' = l+(m+n'),$$

de modo que el teorema vale también para el sucesor n', c.q.d.

142. *Teorema.* $m+n>m$.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema es verdadero para $n=1$ por 135.II y 91.

σ. Si el teorema vale para un número n, por 95 vale también para el sucesor n', porque (por 135.III y 91)

$$m+n' = (m+n)' > m+n,$$

c.q.d.

143. *Teorema.* Las condiciones $m>a$ y $m+n>a+n$ son equivalentes.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema vale para $n=1$ a consecuencia de 135.II y 94.

σ. Si el teorema vale para un número n, vale también para su sucesor n', porque la condición $m+n>a+n$ es equivalente (por 94) a $(m+n)'>(a+n)'$, y por tanto (por 135.III) equivale también a

$$m+n'>a+n',$$

c.q.d.

144. *Teorema.* Si $m>a$ y $n>b$, también

$$m+n>a+b.$$

Demostración. Porque de nuestro supuesto se sigue (por 143) que $m+n>a+n$ y $n+a>b+a$, o también, lo que por 140 es lo mismo, que $a+n>a+b$, de donde se deduce nuestro teorema por 95.

145. *Teorema.* Si $m+n=a+n$, entonces $m=a$.

Demostración. Porque si m no es $=a$, o sea (por 90) si o bien $m>a$ o $a>m$, entonces (por 143) respectivamente $m+n>a+n$ o $m+n<a+n$, de modo que (por 90) ciertamente no puede ser $m+n=a+n$, c.q.d.

146. *Teorema.* Si $l>n$, hay un número m, y (por 145) sólo uno, que satisface la condición $m+n=l$.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema es verdadero para $n=1$. De hecho, si $l>1$, es decir (89) si l está contenido en N', o sea si es la imagen m' de un número m, se sigue de 135.II que $l=m+1$, c.q.d.

σ. Si el teorema vale para un número n, mostramos que también es válido para su sucesor n'. De hecho, si $l>n'$, por 91,95 también $l>n$, y consiguientemente hay un número k que satisface la condición $l=k+n$; como este número es por 138 diferente de 1 (porque si no l sería $=n'$), por 78 es la imagen m' de un número m, y consiguientemente $l=m'+n$, o sea que también (por 136) $l=m+n'$, c.q.d.

§ 12.
Multiplicación de los números.

147. *Definición*. Una vez que hemos encontrado en el anterior § 11 un sistema infinito de nuevas representaciones de la serie numérica N en sí misma, por 126 se puede emplear otra vez cada una de ellas para producir todavía más representaciones nuevas ψ de N. Poniendo allí $\Omega=N$ y $\theta(n)=m+n=n+m$, donde m es un número determinado, encontramos de nuevo en todos los casos

I. $\psi(N)3N$,

y ya sólo queda, para determinar ψ completamente, elegir el elemento ω de N a voluntad. El caso más sencillo es aquel en el que se pone esa elección en cierta conformidad con la elección de θ, poniendo $\omega=m$. Como la representación ψ determinada así completamente depende de este número m, designamos la correspondiente imagen $\psi(n)$ de un número n cualquiera mediante el símbolo mxn o $m.n$ o mn, y llamamos a este número el *producto* formado a partir del número m por *multiplicación* con el número n, o brevemente el producto de los números m y n. El mismo queda completamente determinado (según 126) mediante las condiciones

II. $m.1 = m$,

III. $mn' = mn+m$.

148. *Teorema*. $m'n = mn+n$.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema es verdadero para $n=1$ por 147.II y 135.II.

σ. Si el teorema vale para un número n, se sigue que

$$m'n+m' = (mn+n)+m'$$

y de ahí (por 147.III, 141, 140, 136, 141, 147.III)

$$m'n' = mn+(n+m') = mn+(m'+n)$$
$$= mn+(m+n') = (mn+m)+n' = mn'+n';$$

por tanto el teorema vale también para el sucesor n', c.q.d.

149. *Teorema*. $1.n=n$.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema es verdadero para $n=1$ por 147.II.

σ. Si el teorema es válido para un número n, se sigue que $1.n+1=n+1$, es decir (por 147.III, 135.II) $1.n'=n'$, de modo que el teorema vale también para el sucesor n', c.q.d.

150. *Teorema*. $mn=nm$.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema vale para $n=1$ por 147.II, 149.

σ. Si el teorema vale para un número n, se sigue que

$$mn+m = nm+m,$$

es decir (por 147.III, 148) $mn'=n'm$, de modo que el teorema vale también para el sucesor n', c.q.d.

151. *Teorema.* $l(m+n)=lm+ln$.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema vale para n=1 por 135.II, 147.III, 147.II.

σ. Si el teorema es válido para un número n, se sigue que

$$l(m+n)+l = (lm+ln)+l;$$

pero por 147.III, 135.III

$$l(m+n)+l = l(m+n)' = l(m+n'),$$

y por 141, 147.III

$$(lm+ln)+l = lm+(ln+l) = lm+ln',$$

con lo que $l(m+n') = lm+ln'$, es decir que el teorema es válido también para el sucesor n', c.q.d.

152. *Teorema.* $(m+n)l = ml+nl$.

La demostración se sigue de 151, 150.

153. *Teorema.* $(lm)n = l(mn)$.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema vale para n=1 por 147.II.

σ. Si el teorema se cumple para un número n, se sigue que

$$(lm)n+lm = l(mn)+lm,$$

es decir (por 147.III, 151, 147.III) que

$$(lm)n' = l(mn+m) = l(mn'),$$

de modo que el teorema vale también para el sucesor n', c.q.d.

154. *Nota.* Si en 147 no hubiéramos supuesto ninguna relación entre ω y θ, sino que hubiéramos puesto $\omega=k$, $\theta(n)=m+n$, habríamos formado con ello (por 126) una representación ψ de la serie numérica N menos sencilla; para el número 1 sería $\psi(1)=k$, y para cualquier otro número, expresable por tanto en la forma n', sería $\psi(n')=mn+k$; porque así quedaría satisfecha para todo número n la condición $\psi(n')=\theta\psi(n)$, es decir $\psi(n')=m+\psi(n)$, como se advierte facilmente empleando los teoremas precedentes.

§ 13.
Potenciación de los números.

155. *Definición.* Si de nuevo se pone en el teorema 126 $\Omega=N$, y además ω=a, $\theta(n)=an=na$, se forma una representación ψ de N, que satisface otra vez la condición

I. ψ(N)3N;

designamos la correspondiente imagen $\psi(n)$ de un número cualquiera n mediante el símbolo a^n y llamamos a este número una *potencia* de la *base a*, mientras que a n se le llama el *exponente* de esta potencia

de a. Este concepto queda por tanto completamente determinado mediante las condiciones

$$\text{II. } a^1=a,$$
$$\text{III. } a^{n'}=a.a^n=a^n.a.$$

156. *Teorema.* $a^{m+n}=a^m.a^n$.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema vale para $n=1$ por 135.II, 155.III, 155.II.

σ. Si el teorema es válido para un número n, se sigue que

$$a^{m+n}.a=(a^m.a^n)a;$$

pero por 155.III, 135.III se cumple que $a^{m+n}.a = a^{(m+n)'} = a^{m+n'}$, y por 153, 155.III $(a^m.a^n)a = a^m(a^n.a) = a^m.a^{n'}$; con lo que $a^{m+n'} = a^m.a^{n'}$, es decir que el teorema es válido también para el sucesor n', c.q.d.

157. *Teorema.* $(a^m)^n=a^{mn}$.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema vale para $n=1$ por 155.II, 147.II.

σ. Si el teorema es válido para un número n, se sigue que

$$(a^m)^n.a^m = a^{mn}.a^m;$$

pero por 155.III $(a^m)^n.a^m = (a^m)^{n'}$, y por 156, 147.III $a^{mn}.a^m = a^{mn+m} = a^{mn'}$; con lo que $(a^m)^{n'} = a^{mn'}$, es decir que el teorema se cumple también para el sucesor n', c.q.d.

158. *Teorema.* $(ab)^n = a^n.b^n$.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema vale para $n=1$ por 155.II.

σ. Si el teorema se cumple para un número n, se sigue de 150, 153, 155.III que también $(ab)^n.a = a(a^n.b^n) = (a.a^n)b^n = a^{n'}.b^n$, y de aquí $((ab)^n.a)b = (a^{n'}.b^n)b$; pero por 153, 155.III se cumple que $((ab)^n.a)b = (ab)^n.(ab) = (ab)^{n'}$, e igualmente

$$(a^{n'}.b^n)b = a^{n'}.(b^n.b) = a^{n'}.b^{n'};$$

con lo que $(ab)^{n'} = a^{n'}.b^{n'}$, es decir que el teorema se cumple también para el sucesor n', c.q.d.

§ 14.
Número [cardinal] de elementos de un sistema finito.

159. *Teorema.* Si Σ es un sistema infinito, cada uno de los sistemas de números Z_n definidos en 98 es representable similarmente en Σ (es decir, es similar a una parte de Σ), e inversamente.

Demostración. Si Σ es infinito, por 72 hay ciertamente una parte T de Σ que es simplemente infinita, o sea (por 132) que es similar a la serie numérica N, y a consecuencia de 35 cada sistema Z_n es también, como parte de N, similar a una parte de T, o sea a una parte de Σ, c.q.d.

La prueba de la inversa –por evidente que pueda parecer– es más complicada. Si cada sistema Z_n es similarmente representable en Σ, a cada número n le corresponde una representación similar α_n de Z_n tal que $\alpha_n(Z_n)3\Sigma$. De la existencia de tal serie de representaciones α_n, que consideraremos dadas y sobre las que no haremos ninguna otra suposición, derivamos en primer lugar, con ayuda del teorema 126, la existencia de una nueva serie de representaciones ψ_n que poseen la propiedad especial de que cada vez que $m<n$, o sea (por 100) cada vez que $Z_m 3 Z_{n'}$, la representación ψ_m de la parte Z_m está contenida (21) en la representación ψ_n de Z_n, es decir que las representaciones ψ_m y ψ_n coinciden completamente para todos los números contenidos en Z_m, de modo que siempre

$$\psi_m(m)=\psi_n(m).$$

Para aplicar el mencionado teorema conforme a este objetivo, entendemos por Ω aquel sistema cuyos elementos son absolutamente todas las posibles representaciones similares de todos los sistemas Z_n en Σ, y con ayuda de los elementos dados α_n, contenidos igualmente en Ω, definimos una representación θ de Ω en sí mismo de la manera siguiente. Si ß es un elemento cualquiera de Ω, o sea por ejemplo una representación similar del sistema Z_n en Σ, el sistema $\alpha_{n'}(Z_{n'})$ no puede ser parte de ß(Z_n), porque si no $Z_{n'}$ sería por 35 similar a una parte de Z_n, o sea por 107 similar a una parte propia de sí mismo, con lo que sería infinito, lo que entraría en contradicción con el teorema 119; por tanto hay ciertamente en $Z_{n'}$ uno o varios números p tales que $\alpha_{n'}(p)$ no está contenido en ß(Z_n). De estos números p elegimos siempre –simplemente por establecer algo concreto– el menor, k (96), y definimos, ya que $Z_{n'}$ está compuesto (por 108) de Z_n y n', una representación γ de $Z_{n'}$ haciendo que para todos los números m contenidos en Z_n la imagen sea $\gamma(m)=$ß(m), y además $\gamma(n')=\alpha_{n'}(k)$. Ahora consideramos esta representación γ de Z_n en Σ, que claramente es similar, como una imagen θ(ß) de la representación ß, y con ello queda completamente determinada una representación θ del sistema Ω en sí mismo. Una vez que hemos determinado las cosas Ω y θ mencionadas en 126, elegimos finalmente para el elemento de Ω designado por ω la representación dada α_1; con ello se determina por 126 una representación ψ de la serie numérica N en Ω que, si designamos la imagen correspondiente a un determinado número n no mediante $\psi(n)$ sino mediante ψ_n, satisface las condiciones

$$\text{II. } \psi_1=\alpha_1,$$

$$\text{III. } \psi_{n'}=\theta(\psi_n).$$

Por inducción completa (80) se deduce en primer lugar que ψ_n es una representación similar de Z_n en Σ, dado que

ρ. esto es verdadero para $n=1$ a consecuencia de II, y

σ. si esa afirmación es adecuada para un número n, se sigue de III y de las características de la transformación antes descrita θ de $\mathfrak{B}$ en γ, que la afirmación vale también para su sucesor n', c.q.d. A partir de ahí deducimos, igualmente por inducción completa (80) que, si m es un número cualquiera, la propiedad antes indicada

$$\psi_n(m)=\psi_m(m)$$

corresponde realmente a todos los números n que son $\geq m$, o sea (por 93, 74) que pertenecen a la cadena m_0; de hecho

ρ. esto es inmediatamente evidente para $n=m$, y

σ. si esa propiedad corresponde a un número n, se sigue otra vez, de III y las características de θ, que también corresponde al número n', c.q.d. Una vez establecida también esta propiedad particular de nuestra nueva serie de representaciones ψ_n, podemos demostrar facilmente nuestro teorema. Definimos una representación χ de la serie numérica N haciendo corresponder a cada número n la imagen $\chi(n)=\psi_n(n)$; claramente (por 21) todas las representaciones ψ_n están contenidas en esta representación χ. Como ψ_n era una representación de Z_n en Σ, se sigue en primer lugar que la serie numérica N queda igualmente representada por χ en Σ, de modo que $\chi(N)3\Sigma$. Por otro lado, si m, n son números distintos, podemos suponer por simetría (según 90) que $m<n$; entonces por lo anterior $\chi(m)=\psi_m(m)= \psi_n(m)$ y $\chi(n)=\psi_n(n)$; pero como ψ_n era una representación similar de Z_n en Σ, y m, n son elementos distintos de Z_n, $\psi_n(m)$ es distinto de $\psi_n(n)$, de modo que también $\chi(m)$ es diferente de $\chi(n)$, es decir que χ es una representación similar de N. Como además N es un sistema infinito (71), lo mismo se puede decir (por 67) del sistema $\chi(N)$ similar a él, y por 68, dado que $\chi(N)$ es parte de Σ, también de Σ, c.q.d.[24]

160. *Teorema*. Un sistema Σ es finito o infinito según exista o no un sistema Z_n similar a él.

Demostración. Si Σ es finito, por 159 hay sistemas Z_n que no son similarmente representables en Σ; como por 102 el sistema Z_1 consiste en el único número 1 y por consiguiente es similarmente representable en todo sistema, el menor número k (96) al que corresponde un sistema Z_k no similarmente representable en Σ debe ser distinto de 1, o sea (por 78) $=n'$, y como $n<n'$ (91) hay una representación ψ similar de Z_n en Σ; si ahora $\psi(Z_n)$ fuera sólo una parte propia de Σ, o sea si en Σ hubiera un elemento α que no contenido en $\psi(Z_n)$, podríamos, dado que $Z_{n'}=\mathfrak{M}(Z_n,n')$ (108), extender esta representación ψ a una representación ψ similar de $Z_{n'}$ en Σ, poniendo $\psi(n')=\alpha$, cuando hemos supuesto que $Z_{n'}$ no es similarmente representable en Σ. Con lo que $\psi(Z_n)=\Sigma$, es decir que Z_n y Σ son sistemas similares. Inversamente, si un sistema Σ es similar a un sistema Z_n, entonces Σ es (por 119,67) finito, c.q.d.

161. *Definición.* Si Σ es un sistema finito, por 160 hay un número n, y por 120, 33 sólo uno, al que corresponde un sistema Z_n similar al sistema Σ; a este número n se llama *número [cardinal]* de los elementos contenidos en Σ (o también *grado* del sistema Σ), y se dice que consiste en n elementos o es un sistema de n elementos, o que el número n determina *cuántos* elementos están contenidos en Σ.* Cuando los números se utilizan para expresar con precisión esta propiedad definida de los sistemas finitos, se les llama *números cardinales*. En cuanto se ha elegido una determinada representación similar ψ del sistema Z_n, mediante la cual $\psi(Z_n)=\Sigma$, a cada número m contenido en Z_n (es decir, a cada número m que es $\leq n$) le corresponde un determinado elemento $\psi(m)$ del sistema Σ, y al revés, a cada elemento de Σ le corresponde (por 26) a través de la representación inversa $\overline{\psi}$ un determinado número m de Z_n. Con frecuencia se designa a todos los elementos de Σ con una única letra, por ejemplo α, a la que se pone como subíndice el número diferenciador m, de modo que $\psi(m)$ se designa α_m. Se dice también que estos elementos están *numerados* y *ordenados* de cierta forma por ψ, y se llama a α_m el m-ésimo elemento de Σ; si $m<n$, se llama a $\alpha_{m'}$ elemento *sucesor* de α_m, y α_n es denominado *último* elemento. En esta numeración de los elementos, los números m intervienen de nuevo como números ordinales (73).[25]

162. *Teorema.* Todos los sistemas similares a un sistema finito poseen el mismo número cardinal.

La demostración se sigue inmediatamente de 33, 161.

163. *Teorema.* El número cardinal de los números contenidos en Z_n, es decir de aquellos números que son $\leq n$, es n.

Demostración. Por 32, Z_n es similar a sí mismo.

164. *Teorema.* Si un sistema consiste en un único elemento, el número cardinal de sus elementos es $=1$, e inversamente.

La demostración se sigue inmediatamente de 2, 26, 32, 102, 161.

165. *Teorema.* Si T es una parte propia de un sistema finito Σ, el número cardinal de T es menor que el de Σ.

Demostración. Por 68 T es un sistema finito, de modo que es similar a un sistema Z_m, donde m designa el cardinal de T; si además n es el cardinal de Σ, o sea Σ es similar a Z_n, por 35 T es similar a una parte propia E de Z_n, y por 33 Z_m y E son también similares entre ellos; ahora, si fuera $n\leq m$, y por tanto $Z_n 3 Z_m$, E sería también (por 7) una parte propia

---

* Por motivos de sencillez y claridad limitamos en lo que sigue el concepto de número [cardinal] a sistemas finitos; por tanto, cuando hablamos del número [cardinal] de ciertas cosas, expresamos siempre con ello que el sistema cuyos elementos son esas cosas es finito.

de Z_m, y consiguientemente Z_m sería un sistema infinito, lo que contradice el teorema 119; con lo que (por 90) $m<n$, c.q.d.

166. *Teorema*. Si $\Gamma=\mathfrak{M}(B,\gamma)$, donde B es un sistema de n elementos y γ es un elemento de Γ no contenido en B, Γ consiste en n' elementos.

Demostración. Si $B=\psi(Z_n)$, donde ψ designa una representación similar de Z_n, por 105,108 ésta puede extenderse a una representación similar ψ de $Z_{n'}$ poniendo $\psi(n')=\gamma$, de modo que precisamente $\psi(Z_{n'})=\Gamma$, c.q.d.

167. *Teorema*. Si γ es un elemento de un sistema Γ formado por n' elementos, n es el cardinal de todos los demás elementos de Γ.

Demostración. Si B designa el conjunto de todos los elementos de Γ distintos de γ, $\Gamma=\mathfrak{M}(B,\gamma)$; si ahora b es el cardinal del sistema finito B, por el teorema anterior b' es el cardinal de Γ, o sea que $b'=n'$, de donde por 26 se sigue también $b=n$, c.q.d.

168. *Teorema*. Si A consiste en m elementos y B en n, y A y B no tienen ningún elemento en común, $\mathfrak{M}(A,B)$ está formado por $m+n$ elementos.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema es verdadero para $n=1$ a consecuencia de 166,164 135.II.

σ. Si el teorema es válido para un número n, vale también para su sucesor n'. De hecho, si Γ es un sistema de n' elementos, se puede poner (por 167) $\Gamma=\mathfrak{M}(B,\gamma)$, donde γ designa un elemento de Γ, y B el sistema de los otros n elementos. Si ahora A es un sistema de m elementos, ninguno de los cuales está contenido en Γ, ni por tanto en B, y ponemos $\mathfrak{M}(A,B)=\Sigma$, de acuerdo con nuestro supuesto el cardinal de Σ es $m+n$, y como γ no está contenido en Σ, por 166 el cardinal de los elementos contenidos en $\mathfrak{M}(\Sigma,\gamma)$ es $=(m+n)'$, o sea (por 135.III) $=m+n'$; pero como (por 15) claramente $\mathfrak{M}(\Sigma,\gamma) = \mathfrak{M}(A,B,\gamma) = \mathfrak{M}(A,\Gamma)$, $m+n'$ es el cardinal de $\mathfrak{M}(A,\Gamma)$, c.q.d.

169. *Teorema*. Si A y B son sistemas finitos de m y n elementos respectivamente, $\mathfrak{M}(A,B)$ es un sistema finito y el número cardinal de sus elementos es $\leq m+n$.

Demostración. Si $B3A$, entonces $\mathfrak{M}(A,B)=A$, y el cardinal m de los elementos de este sistema es (por 142) $<m+n$, como se había afirmado. Pero si B no es parte de A, y T es el sistema de todos aquellos elementos de B que no están contenidos en A, por 165 su cardinal es $p\leq n$, y como claramente

$$\mathfrak{M}(A,B)=\mathfrak{M}(A,T),$$

por 143 el cardinal $m+p$ de este sistema es $\leq m+n$, c.q.d.

170. *Teorema*. Todo sistema compuesto de n sistemas finitos es finito.

Demostración por inducción completa (80).

ρ. El teorema es evidente (por 8) para n=1.

σ. Si el teorema vale para un número n, y Σ es un sistema compuesto de n' sistemas finitos, sea A uno de estos sistemas y B el sistema compuesto de todos los restantes; como su número (por 167) es =n, por nuestro supuesto B es un sistema finito. Ahora, como claramente $\Sigma=\mathfrak{M}(A,B)$, de aquí y de 169 se sigue que Σ es también un sistema finito, c.q.d.

171. *Teorema*. Si ψ es una representación disimilar de un sistema finito Σ de n elementos, el número cardinal de la imagen ψ(Σ) es menor que n.

Demostración. Si de todos aquellos elementos de Σ que tienen una y la misma imagen siempre elegimos uno solo, a voluntad, el sistema T de todos los elementos elegidos es claramente una parte propia de Σ, porque ψ es una representación disimilar de Σ(26). Resulta igualmente evidente que la representación de esta parte T contenida (por 21) en ψ es similar, y que $\psi(T)=\psi(\Sigma)$; con esto el sistema ψ(Σ) es similar a la parte propia T de Σ, y de aquí se sigue nuestro teorema por 162, 165.

172. *Nota final*. Aunque acabamos de demostrar que el número cardinal m de los elementos de ψ(Σ) es menor que el número cardinal n de Σ, en ciertos casos se dice sin embargo que el número cardinal de ψ(Σ) es =n. Naturalmente la palabra cardinal se usa entonces en un sentido distinto al precedente (161); pues si α es un elemento de Σ, y a es el cardinal de todos aquellos elementos de Σ que poseen una misma imagen ψ(α), a menudo se considerará a esta última, en cuanto elemento de ψ(Σ), como representante de a elementos, que se pueden distinguir entre sí al menos por su procedencia, y de acuerdo con ello se le contará como un elemento a-uple de ψ(Σ). Se llega así a la noción, muy útil en muchos casos, de sistemas en los que cada elemento está provisto de un determinado número de frecuencia, que determina cuántas veces debe ser contado como elemento del sistema. Por ejemplo, en el caso anterior se diría que n es el número cardinal de los elementos de ψ(Σ) contados en este sentido, mientras que el cardinal m de los elementos realmente distintos de este sistema coincide con el cardinal de T. Semejantes desviaciones del significado original de un término técnico, que no son otra cosa que extensiones del concepto original, aparecen muy frecuentemente en la matemática; pero no es el propósito de este escrito entrar en más detalles al respecto.

FRAGMENTOS SOBRE ARITMÉTICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

Entre los manuscritos que Dedekind dejó al morir se encuentran muchos que completan de alguna manera la exposición de sus ideas sobre la construcción del sistema numérico y sobre la teoría de conjuntos. De entre ellos he escogido cuatro que me parecen especialmente relevantes.

El primero, 'La extensión del concepto de número sobre la base de la serie de los números naturales', fue escrito más tarde que algunos de los otros, sin duda en los años 1890, pero lo antepongo porque enlaza directamente con los escritos anteriores. En el primer prólogo a *¿Qué son y para qué sirven los números?*, Dedekind manifiesta la intención de exponer el desarrollo del sistema numérico sobre la base de N; dicho libro expone los fundamentos necesarios para todas las extensiones, la más difícil de las cuales fue el objeto de *Continuidad y números irracionales*. El manuscrito que traduzco es evidentemente el fruto de esa intención, aunque no llega más que a los números enteros y ni siquiera trata con detalle la introducción de las operaciones. De todos modos, sirve para dar una idea precisa del modo en que Dedekind pretendía tratar todo el asunto; es especialmente original la definición del orden en Z, y es notable cómo Dedekind trabaja con clases de equivalencia.

Los otros trabajos son muy breves. El segundo se titula 'Peligros de la teoría de sistemas' y es de fecha tardía, años 1890 o 1900. Es interesante porque considera los problemas asociados con la ausencia de distinción explícita entre las relaciones de pertenencia e inclusión, ausencia que es característica del libro de Dedekind. Está directamente relacionado con la parte final de la carta a Weber de enero de 1888, carta que atestigua el hecho de que Dedekind era consciente de dichos problemas ya al escribir *¿Qué son y para qué sirven los números?*. Dedekind parece haber explorado esta cuestión buscando el origen de las antinomias.

A continuación aparece 'Representación similar (clara) y sistemas similares', que lleva la fecha del 11 de septiembre de 1887. También este manuscrito enlaza directamente con el libro de 1888 (proposición 63) y tiene un interés especial porque en él se demuestra, empleando la teoría de cadenas, el teorema de equivalencia de Schröder-Bernstein, famoso por ser uno de los que Cantor dejó sin demostrar (a veces se denomina teorema de Cantor-Bernstein). Se trata de un teorema elemental y fundamental de la teoría de conjuntos, enunciado por Cantor en 1895 y demostrado por Bernstein en 1897. Dedekind lo había demostrado ya en 1887 en la forma que vemos, similar a como lo haría Zermelo en 1908, pero no decidió publicarlo aunque encajaría de forma natural al final del § 4 de *¿Qué son ...?* (cf. nuestra nota al texto). En 1899, tras hablar con Bernstein del tema y habiendo olvidado esta primera demostración, encontró otra esencialmente igual que envió por carta a Cantor (cf. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen,* Hildesheim: Olms, 1966, 449).

En cuanto al último trabajo, es el más antiguo de los cuatro y no trata ya de teoría abstracta de conjuntos, sino de teoría topológica. Dedekind introduce las nociones de abierto (que curiosamente denomina 'cuerpo'), interior, exterior y frontera; el tema conecta por un lado con la cuestión de la continuidad y los irracionales, y por otro con la noción de variedad continua en el sentido que le daba Riemann. El manuscrito proviene de los años 1860; en una carta a Cantor del 19.01.1879 leemos:

> En caso de publicación, consideraría deseable que los nombres o expresiones técnicas de la teoría de variedades [...] fueran definidos con toda precisión: sería muy meritorio que toda esta 'teoría de dominios' se expusiera *ab ovo*, sin apoyarse en la intuición geométrica; y para ello habría que definir con toda precisión y claridad, por ejemplo, la noción de línea que conduce continuamente del punto *a* al punto *b* por el interior del dominio *G*. Las definiciones de Netto [...] contienen un buen germen, pero me parecen susceptibles de simplificación y complementación. No me permitiría un juicio como éste si no me hubiera dedicado intensamente a estos problemas hace muchos años, cuando pensaba editar las lecciones de Dirichlet sobre potencial, fundamentando más rigurosamente el llamado principio de Dirichlet. Tengo algunas definiciones que según me parece ofrecen un fundamento muy bueno; pero después abandoné todo ese asunto, y en este momento sólo podría ofrecer una exposición incompleta, ya que la reelaboración de la teoría de números de Dirichlet ocupó todos mis esfuerzos.

Si el manuscrito en cuestión proviniera de la época que indica la carta sería llamativo, porque se trata de los años 1863-66 aproximadamente.

LA EXTENSIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO SOBRE LA BASE DE LA SERIE DE LOS NÚMEROS NATURALES.

I. La introducción del cero y de los números negativos.

En el § 11 de mi escrito aparecido en el año 1888 bajo el título *¿Qué son y para qué sirven los números?* –que citaré abreviadamente mediante Z– se trata la adición de números naturales, de tal manera que se alcanza a la vez el fundamento para su sustracción. Si α_1 y α_2 son números naturales, y si $\alpha_1 < \alpha_2$, hay siempre un y sólo un número (natural) n que satisface la condición (Z.146)

$$n+\alpha_1 = \alpha_2. \quad (1)$$

Este número n se llama la *diferencia* de los números α_2, α_1 y se designará $\alpha_2\ \alpha_1$, de modo que el hecho (1) se expresará

$$n = \alpha_2\ \alpha_1; \quad (2)$$

el número α_1 se llama el *sustraendo*, y α_2 el *minuendo* de esta diferencia. Pero si el supuesto $\alpha_1 < \alpha_2$ no se cumple, o sea (Z.92) si $\alpha_1 \geq \alpha_2$, no existe ningún número n que satisfaga la condición (1) (Z.142), el signo $\alpha_2 - \alpha_1$ no tiene hasta aquí ningún sentido. Si pese a todo ha de tomar el significado de un número, es necesaria una extensión del concepto de número.

Para preparar tal introducción de nuevos números y establecerla sobre un fundamento totalmente claro y seguro, considérense todos aquellos *pares de números* α_1, α_2 en los que $\alpha_1 < \alpha_2$, y que tienen una misma diferencia $n=\alpha_2\ \alpha_1$; diremos que dos de esos pares de números son *congruentes*. Para abreviar designamos cualquier par de números α_1, α_2 (que hay que diferenciar del par de números α_2, α_1) con una letra α, y la congruencia

$$\alpha \equiv \beta \quad (3)$$

designará la mencionada coincidencia de los pares de números α, β, que consiste en el hecho

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 - \beta_1, \quad (4)$$

es decir, en la existencia de un número n que satisface simultáneamente las dos condiciones

$$n+\alpha_1 = \alpha_2 \text{ y } n+\beta_1 = \beta_2 \quad (5)$$

Pero de aquí se *sigue* (Z.140)

$$(n+\alpha_1)+\beta_2 = (n+\beta_1)+\alpha_2,$$

o sea también (Z.141)

$$n+(\alpha_1+\beta_2) = n+(\beta_1+\alpha_2),$$

con lo que también (Z.140, 145)

$$\alpha_1+\beta_2 = \beta_1+\alpha_2. \qquad (6)$$

Inversamente, si los números α_1, α_2, β_1, β_2 satisfacen esta condición (6), y si además $\alpha_1<\alpha_2$, se sigue, como se hallará fácilmente, que también $\beta_1<\beta_2$, y que la condición (4) queda satisfecha.

Ahora bien, mientras que la coincidencia entre los pares α, β expresada en la forma (4) sólo tiene sentido cuando $\alpha_1<\alpha_2$ y $\beta_1<\beta_2$, la relación entre α, β deducida de ella y expresada en la forma (6) puede también someterse a prueba, para ver si se da o no se da, cuando desaparecen esas restricciones. Por tanto, podemos extender la noción de congruencia (3) entre pares de números α, β haciéndola equivalente con la condición (6), sean cuales sean las características de los números α_1, α_2, β_1, β_2.

Entonces resulta evidente, en primer lugar, que la congruencia entre los dos pares de números α, β es siempre, también bajo esta extensión, simétrica o recíproca, es decir que de $\alpha\equiv\beta$ se sigue $\beta\equiv\alpha$, y por otro lado que siempre $\alpha\equiv\alpha$, y finalmente que de $\alpha\equiv\beta$ y $\beta\equiv\gamma$ se sigue siempre $\alpha\equiv\gamma$; pues si

$$\alpha_1+\beta_2 = \beta_1+\alpha_2$$

y a la vez

$$\beta_1+\gamma_2 = \gamma_1+\beta_2,$$

se sigue que

$$(\alpha_1+\beta_2)+(\beta_1+\gamma_2) = (\beta_1+\alpha_2)+(\gamma_1+\beta_2),$$

o lo que es lo mismo, de acuerdo con los teoremas de adición (Z.§ 11),

$$(\beta_1+\beta_2)+(\alpha_1+\gamma_2) = (\beta_1+\beta_2)+(\gamma_1+\alpha_2),$$

o sea también (Z.145)

$$\alpha_1+\gamma_2 = \gamma_1+\alpha_2,$$

c.q.d. De aquí se sigue que se pueden distribuir todos los pares de números posibles α en *clases* según su congruencia o incongruencia: si β es cualquier par de números, se designará (β) la clase (el sistema, la totalidad, el conjunto) de todos los pares de números congruentes con β; entonces, de acuerdo con los teoremas antes demostrados, dos cualesquiera de los pares contenidos en (β), α, γ, son congruentes entre sí, y por tanto $(\alpha) = (\beta) = (\gamma)$, es decir, que las clases son idénticas; todo par contenido en una clase puede considerarse como su representante; dos clases son, o bien totalmente idénticas, o bien no tienen ningún par de números común.

Ahora designamos con *P* el sistema de todas estas clases (α), y nos planteamos el problema de obtener un panorama claro del mismo, es decir, de todos los elementos (α) contenidos en él, según sus diferencias. Si α es un determinado representante de una clase (α), y si $\alpha_1<\alpha_2$, hay un y sólo un número n que satisface la condición $n+\alpha_1 = \alpha_2$; y si β pertenece a la misma clase, entonces, como ya se indicado, también

$n+\beta_1 = \beta_2$; e inversamente, si m designa un número arbitrario, el par de números consistente en los números $\mu_1=m$ y $\mu_2=n+m$ pertenece a la misma clase (α). Si m recorre todos los números, μ recorre todos los pares de números contenidos en la clase. Por tanto, la clase (α) queda totalmente caracterizada por un sólo *número n*. Llamaremos *positivas* a estas clases; a toda clase positiva corresponde un determinado número, e inversamente, a todo número corresponde una y sólo una clase positiva. Se puede denominar al número *n carácter* de la clase positiva. El sistema de las clases positivas (α) es por tanto similar al sistema N de los números naturales n (Z.32).

Una vez determinada esta representación similar del sistema de las clases positivas en la serie numérica, que agota completamente esta última, ya no es posible extender esa representación a una representación similar del sistema P de todas las clases (α) en N.[1] Esto nos da lugar a la *extensión del concepto de número*, *creando nuevos números*, es decir, nuevos individuos que servirán como caracteres (imágenes) de las clases no positivas del sistema P. Cada una de esas clases definirá uno de los nuevos números, y dos de tales números serán diferentes siempre y sólo cuando correspondan a diferentes clases. Investiguemos la riqueza del dominio numérico obtenido mediante este acto de creación.

Consideremos primero el caso de que en una clase (α) esté contenido un par de números α cuyos números α_1, α_2 sean idénticos entre sí. Entonces se deduce de (6) que todos los pares β contenidos en esta clase tienen la misma propiedad, e, inversamente, que todos los pares así constituídos están contenidos en esta clase. El número característico de esta clase, que hay que crear, se llamará *cero* y se designará mediante el símbolo 0. Esta clase se llamará *clase cero*.

Consideramos finalmente una clase (α) en la que está contenido un par α que satisface la condición $\alpha_1>\alpha_2$; entonces todos los pares β contenidos en ella deben tener la misma propiedad, porque si no, de acuerdo con lo anterior, esta clase sería la clase cero o una clase positiva. En este caso hay un y sólo un número natural (antiguo) n que satisface la condición $n+\alpha_2 = \alpha_1$, y si β pertenece a la misma clase, y sólo en ese caso, será igualmente $n+\beta_2 = \beta_1$. Si m recorre todos los números naturales, la clase consiste en todos los pares μ en los que $\mu_1=n+m$, $\mu_2=m$. Estas clases se llamarán *negativas* y *opuestas* a las clases positivas que antes hemos caracterizado mediante el número n. El número característico de esta clase negativa, que hay crear, se llamará número *negativo* y se designará de momento mediante el símbolo $\bar{n}$, mientras que los antiguos números naturales n se llamarán también en el futuro números *positivos*. Todo número positivo n corresponde a un número negativo $\bar{n}$ *opuesto* a él, e inversamente.

Como con esto hemos agotado todas las clases del sistema *P*, nuestro dominio numérico actual, que designaremos *M*, consiste en todos los números positivos *n*, el número 0, y todos los números negativos $\bar{n}$.

El panorama de este dominio numérico *M* será más claro si *ordenamos* los individuos numéricos contenidos en él de forma similar a como lo hicimos originalmente con la serie *N* de los números naturales (o positivos), contenida en *M*, al definirla (Z.73). Entonces obtuvimos esta ordenación por medio de una representación similar ϕ del sistema *N* en sí mismo, y a cada número *n* correspondía un número $\phi(n) = n'$, que designábamos como el número sucesor de *n*, y más tarde, al introducir la adición (Z.135), expresábamos también en la forma $n+1$. Podemos ahora designar al número *n* como el número precedente del número *n'*, y mediante la inversión de la representación similar ϕ se obtiene que todo número, con excepción del 1, posee un y sólo un número predecesor. La cuestión es ahora si se puede extender esta ordenación de los números naturales efectuada mediante la aplicación ϕ a nuestro actual dominio numérico *M*, que abarca al anterior, y de qué manera ha de hacerse. Esta investigación sólo puede aspirar a tener éxito si primero transferimos la representación ϕ de los números *n*, dada en *N*, a sus correspondientes clases positivas (α) de pares de números α, y luego intentamos extender la ordenación de las clases positivas así obtenida a la clase cero y las clases negativas, y finalmente volvemos de estas clases a sus correspondientes números de *M*. Aunque todo matemático sabe de antemano que el intento tendrá éxito, no por esta circunstancia debemos desistir de exponer este proceso mental, al menos en lo esencial.

Si *n* es un número natural y α cualquier par de su correspondiente clase positiva (α), entonces $n+\alpha_1=\alpha_2$; si además β es cualquier par de la clase positiva (β) que corresponde al sucesor de *n*, $n'=n+1$, entonces $n+1+\beta_1=\beta_2$, y de aquí se deduce igual que antes, por eliminación de *n*, la relación asimétrica entre α y β

$$\alpha_1+\beta_2 = \alpha_2+1+\beta_1. \qquad (7)$$

Esta relación tiene un sentido totalmente claro sean cuales sean los dos pares α, β, y puede someterse a prueba inmediata, a propósito de su validez o invalidez, tanto si el supuesto $\alpha_1<\alpha_2$ realizado al derivarla queda satisfecho, como si no. Y se deduce, como el lector hallará fácilmente, que si α recorre todos los pares de una cierta clase (α), todos los pares β que están en la relación (7) con un α cualquiera constituyen una misma clase (β), que por consiguiente queda completamente determinada por la clase (α), y puede llamarse la clase *sucesora* de la clase (α) y designarse (α)'. Inversamente, si (β) es cualquier clase, existe siempre una y sólo una clase *precedente*, es decir una clase (α) tal que la condición (α)'=(β)

queda satisfecha. Finalmente, si designamos los dos números correspondientes a tales clases (α), (β), sean naturales o no, mediante *a*, *b*, podemos llamar a *b* el número *sucesor* de *a*, y a *a* el *predecesor* de *b*, y entonces todo número posee un y sólo un número sucesor, así como un y sólo un predecesor. El sistema de todos los números puede por tanto, cosa que no será necesario desarrollar, recorrerse completamente partiendo de cualquier individuo determinado, en dos *direcciones* opuestas entre sí.

La mencionada ordenación de todos los números constituye, como todos habrán previsto, sólo un caso particular de la *adición* y *sustracción* general de los números, a las que pasamos a continuación. En primer lugar, si *a* y *b* son dos números positivos, su suma $c=a+b$ es también un número positivo ya definido (Z.§ 11). Si ahora α, β, γ designan cualesquiera pares de las clases correspondientes a los números *a*, *b*, *c*,

$$a+\alpha_1=\alpha_2, \quad b+\beta_1=\beta_2,$$
$$(a+b)+\gamma_1=\gamma_2,$$

y de aquí se sigue, por los teoremas de adición demostrados, la condición

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_2 = \alpha_2+\beta_2+\gamma_1, \quad (8)$$

en la que ya no se habla de los números naturales *a*, *b*.

PELIGROS DE LA TEORÍA DE SISTEMAS.

(*¿Qué son y para qué sirven los números?* citado con Z.)

Tras la aparición de este escrito (navidades de 1887) tuve la intención de añadir algunos comentarios en una reseña preparada para las *Göttingische gelehrte Anzeigen*, para indicar ciertos peligros; pero esta intención no llegó a materializarse ni con la primera ni con la segunda edición (1893). Entre las notas preparadas para esta edición, una habla del peligro de confundir un sistema *S* consistente en un único elemento *a* con el propio elemento *a*. Esta nota dice:

Nota a 2 (es decir, nº 2 del escrito Z. en pag. 2)

A la penúltima frase se le debe añadir: "y por simplificar designaremos este mismo sistema *S* con *a*, es decir que no lo distinguiremos de *a*, cosa que puede permitirse si se tiene algún cuidado (cf. 3, 8, 102, 104 y otros lugares, donde podrían surgir dudas o contradicciones aparentes)."

Contradicción. Si *b* es distinto de *c* y se designa con
a el *sistema* cuyos elementos son *b* y *c*, y además con
S el *sistema* cuyo único *elemento* es *a*,
y si la definición inmediatamente precedente de igualdad de los *sistemas* *S*, *T* se concibe de tal manera que *S*=*T* *sólo* es válido cuando todo elemento de *S* es también elemento de *T*, y todo elemento de *T* es también elemento de *S*, de aquí, si pusiéramos realmente *S*=*a*, se seguiría *b*=*a* y *c*=*a*, o sea también *b*=*c* en *contradicción* con la hipótesis de que *b* y *c* son diferentes. Si se quiere evitar *tales* peligros, está claro que por el sistema *S* consistente en el único elemento *a no* se debe entender el propio *a*. (Análogamente en 21 a propósito de la representación ϕ contenida en ϕ).

Dicho peligro lo he mencionado incidentalmente más tarde (13 de junio de 1897) en conversación con Felix Bernstein (sin fundamentación), y luego (4 de septiembre de 1899) en conversación con G. Cantor (con fundamentación).

Supongo (como en Z.2) la facultad mental de *crear* a partir de ciertas cosas *a*, *b*, *c*... una cosa *S* totalmente determinada por ellas, que se denominará el *sistema* de dichas cosas, mientras que, inversamente, las últimas se llaman *elementos* de *S* y quedan de nuevo totalmente determinadas por *S*; es decir, un sistema *S* es idéntico con un sistema *T* (sim-

bólicamente *S*=*T*) si y sólo si todo elemento de *S* es también elemento de *T*, y todo elemento de *T* es también elemento de *S*.

Muy a menudo, un sistema *S* no se definirá inmediatamente por nominación de cada uno de sus elementos *a*, *b*, *c*..., sino mediatamente mediante condiciones necesarias y suficientes que debe satisfacer una cosa para ser elemento de *S*.

Así puede darse el caso de que sólo una cosa *a* satisfaga esas condiciones (por ejemplo si todo elemento de *S* ha de ser un número natural divisible por 7, pero también menor que 10) y no plantea ningún inconveniente en absoluto admitir también tal sistema *S* que tiene un único elemento *a*. Pero por las razones antes indicadas es necesario considerar este sistema *S* como una *cosa distinta del elemento a*.

También puede darse el caso de que no haya *ninguna* cosa que satisfaga las mencionadas condiciones; ahora puede dudarse si se admitirá también o no tal sistema (vacío), que no consiste en ningún elemento. En la frase final de Z.2 se excluye por ciertas razones la utilización de tal sistema en ese escrito; pero para la lógica general es (como se sabe) muy ventajoso introducir también un sistema sin elementos, vacío. Si nos situamos en este punto de vista y si formulamos ahora la anterior definición de identidad de sistemas diciendo que un sistema *S* se considerará cono *diferente* de un sistema *T* si y sólo si o bien existe un elemento de *S* que no es elemento de *T*, o bien existe un elemento de *T* que no es elemento de *S*, entonces claramente se cumple el siguiente

Teorema. Existe un único sistema que no tiene ningún elemento; este sistema se denominará *sistema nulo* y se designará siempre con 0.

Sobre esta base se reformulará la definición de Z.3 como sigue:

Definición. Se dice que un sistema *A no es parte* de un sistema *S* cuando existe un elemento de *A* que no es elemento de *S*; en caso contrario se dice que *A es parte de S*, lo que se designará *A*3*S*.

Entonces claramente se cumple el

Teorema. El sistema nulo 0 es parte de todo sistema *S*.

El *peligro* antes indicado, que surge de la identificación de una cosa *s* con el *sistema* consistente en el único *elemento s*, aparece muy claramente al final de Z.3: "Como además todo elemento *s* de un sistema *S* puede ser considerado (por 2) como un sistema" –propiamente, esto no se ha dicho en 2– "podemos utilizar también aquí la designación *s*3*S*." Esto merece ser aclarado con más detalle.

Como antes el símbolo *A*3*S* se ha definido sólo bajo el supuesto de que *A* y *S* son *sistemas*, si *s* es elemento de *S* y si en general se designa con *{s}* aquel *sistema* cuyo único *elemento* es la cosa *s*, se sigue de ahí ciertamente *{s}*3*S*, pero no *s*3*S*. De acuerdo con la definición, este

último símbolo sólo tiene sentido si *s* es igualmente un *sistema*, y en el lugar citado *s* debe entenderse evidentemente en el mismo sentido que *{s}*; esto es perfectamente admisible teniendo *algún cuidado*, pero es fácil que sea *peligroso*, como muestra el siguiente ejemplo:

Sean *u*, *t* diferentes entre sí, y *s* el *sistema {t,u}* consistente en los *elementos t*, *u*, y además *S* el *sistema* consistente en los *elementos s*, *t*; si ahora (según el final de Z.3), ya que *s* es elemento de *S*, quisiéramos sacar la conclusión *s*3*S*, este último símbolo, de acuerdo con su definición y ya que *s* es también el sistema consistente en *t*, *u*, justificaría la conclusión de que el elemento *u* de *s* es también elemento de *S*, y por consiguiente debería ser =*s* (porque *u* es diferente de *t*). Por tanto sería *siempre u={t,u}*, pero igualmente *t={t,u}*, y por tanto *t=u*, con lo que aparece la *contradicción*.

REPRESENTACIÓN SIMILAR (CLARA) Y SISTEMAS SIMILARES. 11.7.1887.

Teorema. Si S está representado similarmente en sí mismo, es decir, si la imagen $\phi(S)=S'3S$, y si además $S'3T3S$, entonces también T es similar a S.

Demostración. Trivial en el caso $T=S$. En caso contrario, sea U el sistema de todos los elementos de S que *no* están contenidos en T, y sea U_0 la *cadena*[2] (§ 4) de U correspondiente a esta representación ϕ de S. Si ahora s es cualquier elemento de S, póngase

$$\psi(s)=\phi(s) \text{ o bien } =s$$

según que s esté contenido en U_0 o no. Entonces ψ es una representación similar de S tal que $\psi(S)=T$. A este respecto hay que mostrar

1. Similaridad de la representación ψ. α) Si diferentes a y b están contenidos en U_0, entonces $\psi(a)=\phi(a)$ y $\psi(b)=\phi(b)$ son diferentes porque ϕ es una representación similar. *ß*) Si a está contenido en U_0 y b *no* está contenido en U_0, entonces $\psi(a)=\phi(a)$ y $\psi(b)=b$ son diferentes porque U_0 es una cadena, $\phi(U_0)3U_0$, por lo que $\psi(a)$ está contenido en U_0, y $\psi(b)$ *no* está contenido en U_0. γ) Si a y b *no* están contenidos en U_0 y son diferentes, $\psi(a)$ y $\psi(b)$ son diferentes.

2. $\psi(S)3T$. Designando con V el sistema de todos los elementos de S que *no* están contenidos en U_0, tenemos

$$S=\mathfrak{M}(U_0,V),\ \psi(S)=\mathfrak{M}(\psi(U_0),V).$$

Ahora, como U_03S, también $\phi(U_0)3\phi(S)$, y como $\phi(S)3T$, también $\phi(U_0)3T$; como además $V3T$ {pues si un elemento v de V *no* estuviera contenido en T, estaría en U, y por tanto (§ 4) en U_0, contra la definición de V; *mejor establecerlo antes*}, entonces se deduce (§ 1) que $\psi(S)3T$.

3. $T3\psi(S)$. Sea t cualquier elemento de T. Si t está contenido en V, entonces t {a consecuencia de $\psi(S)=\mathfrak{M}(\phi(U_0),V)$}[3] también está contenido en $\psi(S)$. Pero si t no está en V, y por tanto está en U_0, como (§ 4) $U_0=\mathfrak{M}(U,\phi(U_0))$, por la definición de U, t debe estar contenido en $\phi(U_0)$, y por tanto también debe estar en $\psi(S)$. C.Q.D.

O *igualmente claro* $T=\mathfrak{M}(\phi(U_0),V)=\psi(S)$.

Teorema [de Schröder-Bernstein]: Si A es similar a una parte de B, y B es similar a una parte de A, también A y B son similares.

Demostración. ϕ y ψ representaciones claras; y

$$\phi(A)3B,\ \psi(B)3A,$$

por tanto

$$\psi\phi(A)3\psi(B)3A;$$

ahora, como la representación $\psi\phi$ es igualmente similar, $\psi\phi(A)$ es similar a A, de modo que (por el teorema anterior) también $\psi(B)$ es similar a A, y como $\psi(B)$ es similar a B, entonces (teorema más simple sobre similaridad) también A es similar a B. C.Q.D.

TEOREMAS GENERALES SOBRE ESPACIOS.

§ 1.

Un sistema P de puntos p, p'... constituye un *cuerpo* si para todo punto p del mismo se puede determinar una longitud δ con la característica de que todos los puntos cuya distancia de p es menor que δ pertenecen igualmente al sistema P. Los puntos p, p' ... están *dentro* de P.

§ 2.

Si P' es un cuerpo y todos sus puntos son también puntos de P, entonces P' se llama *parte* de P.

§ 3.

Teorema. Todos los puntos cuya distancia de un punto fijo p es menor que una longitud dada δ constituyen un cuerpo (llamado *esfera*; p se llama *punto medio*, δ *radio* de la misma).

Demostración. Si $pp' < \delta$, elíjase $\delta' < \delta pp'$; entonces todos los puntos p'' para los que $p'p'' < \delta'$ son también puntos para los cuales $pp'' < \delta$ (porque pp'' $\quad pp'+p'p''$).

§ 4.

Si P es un cuerpo y m un punto en torno al cual se puede describir una esfera tal que ninguno de sus puntos está dentro de P, se dice que el punto m está *fuera* de P.

§ 5.

Teorema. Si P es un cuerpo y existe al menos un punto m fuera de P, entonces hay infinitos puntos fuera de P, y dichos puntos constituyen un cuerpo.

Demostración. Como m está fuera de P, existe una esfera K que puede describirse en torno a m tal que ninguno de sus puntos m' está dentro de P. Todos estos puntos m' están fuera de P; pues si δ es el radio de K, o sea si $mm' < \delta$, descríbase en torno a m' una esfera K de radio $\delta' < \delta\ mm'$; entonces K' es parte de K, y por tanto m' está (por § 4) fuera de P. Del mismo modo se deduce que el sistema M de todos los puntos que están fueran de m constituyen un cuerpo.

§ 6.

Si P es un cuerpo y π un punto que no está dentro de P ni fuera de P, se dice que π es un *punto límite* de P.

§ 7.

Si *P* es un cuerpo y Π es el sistema de todos los puntos límite π de *P* (en caso de que existan), se dice que Π es la *limitación* de *P*.

§ 8.

Teorema. Si ninguno de los puntos de un cuerpo *P'* está dentro de un cuerpo *P*, entonces están todos fuera de *P*.

Demostración. Sea *m'* un punto cualquiera de *P'*; entonces se puede describir en torno a *m'* una esfera tal que todos sus puntos están dentro de *P'*, de modo que no están dentro de *P*. Por § 4, *m'* está fuera de *P*.

§ 9.

Teorema. Un sistema Π de puntos π, todos los cuales son puntos límite de un cuerpo *P*, no puede constituir un cuerpo.

Demostración. Ninguno de los puntos π de Π está (por § 6) dentro de *P*. Si Π fuera un cuerpo, todos los puntos π de Π estarían (por § 8) fuera de *P*. Pero como todos los puntos de Π son puntos límite de *P*, esto resulta (por § 6) imposible.

CORRESPONDENCIA

1. Correspondencia con Lipschitz.

La correspondencia entre Dedekind y Lipschitz –exceptuando una carta de 1861– parece haberse iniciado en marzo de 1876. Lipschitz había publicado en el *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* una exposición sucinta de sus trabajos sobre ecuaciones diferenciales homogéneas, y aprovechando sus relaciones con la revista le sugirió a J. Houël –segundo editor– la posibilidad de publicar un trabajo de Dedekind sobre teoría de números algebraicos. El motivo inmediato de la correspondencia es por tanto la preparación de *Sur la théorie des nombres entiers algebriques*. Hay que decir que hasta entonces Dedekind no había recibido apenas reconocimiento por su trabajo; casi 20 años después escribe: "De todos los matemáticos ha sido usted el primero en mostrar un vivo interés por el trabajo de mi vida, y sin su invitación a publicar en el *Bulletin* una exposición del mismo, quizá hubiera permanecido hasta hoy inadvertido; permítame por tanto expresarle una vez más mis más profundas gracias por su colaboración." (carta a Lipschitz, 17.01.1894; *Briefwechsel*, o.c., p. 100).

En el curso de la correspondencia preparatoria de 1876, Lipschitz plantea varias objeciones a la exposición de Dedekind, que llevan a éste a escribir una interesante introducción al artículo. En ella se menciona en una nota la teoría de los números irracionales, y con este motivo Lipschitz entra a discutir el tema. Vale la pena traducir estas cartas, porque constituyen un intercambio de opiniones entre dos matemáticos muy competentes, iluminando de modo muy claro distintos enfoques de fundamentación: Lipschitz es aquí el individuo tradicional que hace descansar los principios de la matemática en el supuesto de que existe de alguna manera un dominio continuo de magnitudes, del que el matemático no debe ocuparse propiamente. Dedekind propone el establecimiento explícito de todos los supuestos y la construcción puramente abstracta –'lógica' dirá él, aunque hoy la llamaríamos conjuntista– de las teorías. El resultado más llamativo de esta diferencia es la incapacidad de Lipschitz para entender la lectura 'axiomática' que Dedekind hace de los *Elementos* de Euclides. Se obtiene la impresión de que sólo en esta segunda mitad del siglo XIX se encuentran matemáticos realmente capaces de hablar con Euclides de igual a igual, y se ve lo difícil que para la mayoría resultaba este paso.

Lipschitz a Dedekind, 8 de junio de 1876.

[...]

3. Ha tenido usted la amabilidad de enviarme su tratado sobre continuidad y números irracionales, por lo que ya conocía con toda precisión el contenido de la nota que ha de incluirse bajo el texto. Debo confesar que no niego la legitimidad de su definición, pero que soy de la opinión de que dicha definición sólo se diferencia de lo que los antiguos constataron en la forma de expresión, y no en contenido. Sólo puedo decir que la definición establecida por Euclides V,5, que cito en latín

> rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quae possunt multiplicatae sese mutuo *superare*,

y lo que sigue, me parecen tan satisfactorias como su definición. Por esta razón desearía que se suprimiera la afirmación de que teoremas tales como $\sqrt{2}.\sqrt{3}=\sqrt{6}$ no han sido realmente demostrados hasta el momento. Pues creo que los lectores franceses, en particular, compartirán conmigo la convicción de que el citado libro de Euclides contiene los principios necesarios y suficientes para la demostración de ese teorema. Por lo demás, no puedo terminar esta observación sin decirle lo difícil que me resulta escribirla. Estas cuestiones tocan profundamente a un corazón analítico –por utilizar una expresión de Jacobi–, y sólo quiero desear que no se lo tome a mal.

[...]

Dedekind a Lipschitz, 10 de junio de 1876.

[...]

3º. A propósito de mi nota acerca de los números irracionales escribe usted: [...Dedekind repite el texto anterior...].

[...] nunca me he figurado que mi concepción de los números irracionales tuviera un valor especial, de otro modo no la hubiera guardado para mí cerca de catorce años; por el contrario, siempre he estado convencido de que, con toda seguridad, cualquier matemático bien formado de nuestro tiempo, que se plantee una sola vez seriamente el problema de desarrollar de forma rigurosa este asunto, conseguirá también su objetivo. Del mismo modo estoy muy lejos de hacer algún reproche a los matemáticos que no se plantean en absoluto esta cuestión; cualquiera de ellos tendrá con derecho el seguro sentimiento de que

podría resolver la cuestión si quisiera, y si valiera la pena dedicarle tiempo. Por tanto, y aunque no soy insensible a críticas y alabanzas, realmente no me sentaría mal en este caso que se me negara el poco servicio que creo haber realizado en este asunto. Con todo, ya que el asunto me interesó mucho en algún tiempo, quiero permitirme exponerle las razones por las que no puedo adherirme a su punto de vista. Para ello presupongo como base, sobre la que naturalmente habría que ponerse de acuerdo, la aritmética de los números racionales como algo bien fundamentado, y nada más; en mi escrito muestro, sin ninguna inmiscusión de asuntos extraños, que en el propio dominio de los números racionales se puede indicar un fenómeno (la cortadura) que puede emplearse para completar ese dominio mediante una única creación de nuevos números irracionales, y demuestro que el dominio de los números reales así formado posee la característica en la que veo la esencia de la continuidad (§ 3). (Si no se quieren introducir nuevos números, no tengo nada en contra; el teorema que demuestro (§ 5, IV) dice entonces: el sistema de todas las cortaduras en el dominio, por sí discontinuo, de los números racionales, constituye una variedad continua.) Además muestro (§ 6) que la adición de dos números reales puede definirse con toda precisión, y afirmo que lo mismo vale de todas las operaciones restantes, y que apoyándose en ello también pueden demostrarse con todo rigor los teoremas que constituyen el edificio de la aritmética. Naturalmente, estas últimas afirmaciones me obligan en el sentido de que, si alguien dudara todavía la demostrabilidad de un teorema con mis principios, *yo* debería ofrecer realmente esa demostración. Del mismo modo considero que la mayor parte de estos teoremas de la aritmética (propiamente casi todos) no han sido *demostrados* hasta el momento, y para estimular la controversia todo lo posible digo que el teorema $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$ nunca ha sido demostrado. Si alguien quiere contradecirme en esto, si alguien quiere afirmar que el teorema ha sido ya demostrado, le corresponde entonces el peso de la prueba, y deberá ofrecerme una demostración realmente publicada de este u otro teorema que lo contenga. ¿Realmente cree que semejante demostración se encuentra en algún libro? Naturalmente he probado en este punto una gran cantidad de obras de las distintas naciones, ¿y qué se encuentra en ellas? Nada más que los más toscos círculos viciosos, como por ejemplo: $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, porque $(\sqrt{a}.\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2.(\sqrt{b})^2=ab$; no se antepone ni la menor definición del producto de dos números irracionales, y sin ningún escrúpulo se aplica a números irracionales el teorema $(mn)^2 = m^2n^2$, demostrado para números racionales m,n. ¿No es realmente indignante que la enseñanza de la matemática en la escuela se haga pasar por medio especialmente distinguido para la formación del entendimiento, cuando en ninguna otra

disciplina (por ejemplo la gramática) se soportarían ni un momento infracciones tan grandes contra la lógica? Seamos honrados, y si no se quiere proceder científicamente, o si no se puede por falta de tiempo, confesémoslo abiertamente al alumno, que de por sí se inclina a *creer* un teorema sobre la palabra del profesor; esto es mejor que acabar, mediante apariencias de demostración, con el puro y noble sentido de la verdadera demostración.

Realmente creo que con lo anterior me he justificado suficientemente; pero no quiero salir tan bien librado de la empresa, sino que entro con gusto en el giro muy distinto que le ha dado usted a la cuestión. Usted no afirma que en alguna parte se encuentre una demostración rigurosa del teorema anterior, sino que manifiesta la opinión de que, en la famosa y justamente admirada definición euclidea de la proporción (ratio, λόγος) entre magnitudes del mismo tipo, así como en el restante contenido del libro quinto de los *Elementos*, están contenidos los principios que son necesarios y suficientes para la demostración del teorema. Prescindiendo de que, como ya he indicado, no me gusta la intromisión de las *magnitudes* en la teoría pura de números, debo declararme decididamente en contra de ese punto de vista; en mi opinión, la mencionada base *no* es suficiente, a menos que además de los principios euclideos se añada el punto clave de mi escrito, la esencia de la continuidad (§ 3), en modo alguno contenida en ellos. La definición de Euclides dice así, en nuestros términos: las magnitudes del mismo tipo A,B están en la misma proporción que las magnitudes homogéneas A_1,B_1 si, para cada par de números racionales enteros m,n, o bien simultáneamente $nA < mB$ y $nA_1 < mB_1$, o simultáneamente $nA = mB$ y $nA_1 = mB_1$, o simultáneamente $nA > mB$ y $nA_1 > mB_1$. Si esta definición ha de tener algún sentido en absoluto, ha de presuponerse, acerca de las cosas llamadas *magnitudes*, las dos proposiciones siguientes y *nada más*:

1º. De cada dos magnitudes homogéneas y distintas, una puede reconocerse siempre como la mayor, y la otra como la menor.

2º. Si A es una magnitud, y n un número entero, existe siempre una magnitud nA homogénea con A, que es el múltiplo de A correspondiente al número n.

Por lo demás, fuera de estos presupuestos implícitos, y del que se contiene en sus palabras latinas (le ruego que me escriba por qué subraya tan significativamente la palabra *superare*), no se sabe *nada* acerca de la extensión o variedad [Ausdehnung oder Mannigfaltigkeit] del dominio

de magnitudes homogéneas, y la definición *sólo* dice cuándo dos individuos *existentes* en un dominio de magnitudes tienen la misma proporción que otros dos. Quiero además conceder de buen grado que la *proporción* puede valer como definición general de *número*, por más que Euclides nunca usa λόγος y ἀριθμός como sinónimos. Ahora bien, si A es una magnitud determinada, la reunión de todos los múltiplos nA constituye un dominio de magnitudes que por sí mismo satisface los presupuestos anteriores, y en este libro de Euclides no se encuentra la menor indicación de que puedan existir dominios de magnitudes más completos; semejante dominio de magnitudes conduciría claramente, a través de las proporciones entre cada dos magnitudes, a la definición de todos los números *racionales*; y este dominio de números no se vería incrementado aunque se pasase a los dominios de magnitudes, un grado más completos, formados por todas las partes (definición 1) y los múltiplos de una magnitud determinada, es decir, por todas las magnitudes conmensurables con una dada. Semejante dominio posee ya una respetable variedad de magnitudes, y a nadie se le ocurriría fácilmente requerir dominios más completos. El concepto de número, como proporción entre magnitudes homogéneas, no llegaría entonces nunca más allá de lo racional. Ahora dirán todos: si Euclides no hubiera querido más que considerar semejantes dominios de magnitudes, no hubiera necesitado hacer tan complicada su definición de proporción, podría haber dicho simplemente: la proporción entre A y B es igual a la de A_1 y B_1 si existen dos números enteros m,n, tales que simultáneamente $n\mathrm{A} = mB$ y $nA_1 = mB_1$. Por lo que es evidente que Euclides se ha planteado dominios de magnitudes *más completos*; y de hecho en el libro X se trata también de magnitudes *inconmensurables*, a las que corresponden nuevas proporciones, nuevos números irracionales. Pero nunca se encuentra en Euclides, ni en otro escritor posterior, la *realización* de semejante compleción, o sea el concepto del dominio de magnitudes *continuo*, el más completo que puede pensarse, cuya esencia consiste en la propiedad: "si todas las magnitudes de un dominio contínuamente graduado se dividen en dos clases, de modo que toda magnitud de la primera clase es menor que toda magnitud de la segunda, entonces o bien existe en la primera clase una magnitud máxima, o en la segunda clase una magnitud mínima". Si esta propiedad no se incluye *expresamente* en el concepto del dominio de magnitudes, el dominio de números correspondiente permanecerá también discontinuo, y precisamente por ello resultan francamente *imposibles* las definiciones generales de las operaciones aritméticas, porque, en tales dominios lacunarios de números, la suma, diferencia, etc. formada a partir de dos números que realmente existen quizá *no* existen en el mismo dominio. Ciertamente, si se pres-

cinde de definiciones *generales* de la adición, sustracción, multiplicación, división, sólo se necesita decir: *entiendo* como producto $\sqrt{2}.\sqrt{3}$ el número $\sqrt{6}$, por tanto $\sqrt{2}.\sqrt{3}=\sqrt{6}$, ¡c.q.d! Esta sería la forma más extrema de un modo de actuar, que de por sí es pensable pero ciertamente no recomendable, según el cual una operación, por ejemplo la multiplicación, se definiría siempre de nuevo, siempre que se sometieran a ella nuevos números. Teniendo todo esto en cuenta sigo afirmando que los principios euclideos solos, sin apelación al principio de continuidad, que *no* está contenido en ellos, son *incapaces* de fundar una teoría completa de los números reales como proporciones de magnitudes; y no sólo considero verdadera la observación provocadora de que $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$ no ha sido nunca demostrado, sino que también me parece provechosa. Por el contrario, con mi teoría de los números irracionales se crea el modelo completo de un dominio *continuo*, que precisamente por ello es susceptible de caracterizar cualquier proporción de magnitudes mediante un número determinado incluído en él. –Y ahora le ruego que le disculpe a mi corazón analítico una pregunta sincera: ¿no es cierto que el punto de vista que usted ha expresado en 3º., sobre las relaciones entre mis principios y los *Elementos* de Euclides, es hasta el momento sólo una conjetura, cuya corrección no ha comprobado usted mismo hasta los últimos principios? En caso contrario me obligaría usted a la mayor gratitud si quisiera enviarme una fundamentación de su punto de vista.

[...]

Lipschitz a Dedekind, 6 de julio de 1876.

[...]

IV. La opinión que tengo sobre la relación entre sus principios y los *Elementos* de Euclides ha sido comprobada por mí, en la medida en que estoy en condiciones de comprobar. Desde mi punto de vista, uno de los mayores logros del espíritu griego es haber fijado para siempre el concepto básico de número irracional. Todos sus sucesores se aprovechan de los frutos de aquel trabajo, y no pueden añadir a él nada esencial.

He subrayado la palabra *superare* porque, con ella, Euclides se abre la posibilidad de analizar la proporción entre aquellas magnitudes que no están en la proporción de dos números enteros. La siguiente definición de igualdad de dos proporciones, que no he escrito a causa de su longitud, y que usted también cita, lo decide todo de un golpe. Si usted no reconoce esto, sólo me lo puedo explicar considerando que no ha tenido usted en cuenta que, en aquella definición, Euclides *presupone la existencia de proporciones que no son iguales a la*

proporción entre dos números enteros. Usted tiene *de antemano la intención de presuponer sólo números racionales, y magnitudes medibles por medio de números racionales*. En este fragmento Euclides procede de otro modo, y aquí está el núcleo de sus diferencias con él. Euclides considera que una magnitud está determinada por la medida de una linea bien definida, y bajo este punto de vista puede mostrar lineas que, respecto a una linea dada, están en una proporción que no puede expresarse mediante dos números enteros.

El ejemplo de la diagonal de un cuadrado, de lado dado, es totalmente suficiente. Sea el lado = 1, en ese caso demuestra realmente Euclides que ninguna fracción racional m/n puede tener un cuadrado = 2, y por eso la diagonal del cuadrado no está con el lado en la proporción de dos números enteros. Por lo tanto, en la medida en que se presupone la existencia de proporciones que no son racionales, aquella definición de la igualdad de dos proporciones basta para desarrollar con tales proporciones las operaciones básicas del cálculo, y esto es básicamente lo mismo que lleva a cabo usted con su principio.

Sé muy bien que objetará usted que no le basta derivar la existencia de una proporción a partir de una construcción geométrica. A esto respondo lo siguiente. El espíritu humano ha extraído la fuerza que hoy tiene, en gran medida, de la ocupación con la geometría. Durante siglos, el *rigor geometricus* ha pasado por ser la máxima exigencia. Si hoy en día establecemos otros requisitos, hemos de agradecerlo en gran parte a la ocupación con la geometría, y ni siquiera hoy son materialmente distintas esas exigencias. El que no quiera decir que la diagonal de aquel cuadrado es = $\sqrt{2}$, no puede negar que $(m/n)^2 = 2$ es imposible para m y n enteros, y debe conceder que las desigualdades

$$(m/n)^2 - 2 > 0 \text{ y } (m/n)^2 - 2 < 0$$

pueden satisfacerse con *precisión arbitraria*. También ésto nos lo han enseñado los antiguos, y ¿tiene su definición de cortadura un contenido distinto de éste? Opino que no. Lo que usted menciona acerca de la completud del dominio, que se deduce de sus principios, coincide de hecho con la propiedad básica de la linea, sin la cual ningún hombre puede imaginarse una linea. Sus teoremas son sólo la expresión de cosas que se ponen de manifiesto inevitablemente en el cálculo con desigualdades, y que han sido utilizadas por todo el que ha calculado con desigualdades sabiendo lo que hacía.

También el cálculo con logaritmos presupone necesariamente que todos aquellos conceptos han sido puestos en claro del modo más completo, y de todos aquellos que comprenden el cálculo con logaritmos, debo suponer que ven claros esos conceptos.

[...]

Dedekind a Lipschitz, 27 de julio de 1876.

[...]

Aunque en este momento, como ya he dicho arriba, tengo poca esperanza de que nos pongamos de acuerdo, porque difícilmente tenemos algo nuevo que ofrecernos uno al otro, y aunque quizá fuera más conveniente aplazar la discusión hasta que su obra[2] esté acabada, si es que entonces hubiera algún motivo para proseguir nuestra discusión, pese a todo le ruego que tras su segunda carta me dé la palabra por segunda vez, ya que deseo resaltar una vez más mi punto de vista frente al suyo lo más netamente posible. Primero me gustaría defenderme de una afirmación suya, de la cual parece desprenderse que sigue atribuyéndome una opinión incorrecta sobre el *valor* de mi escrito sobre la continuidad, a pesar de que en mi última carta me he expresado de tal modo que creía haber destruido toda duda al respecto. Después de tratar el ejemplo de 2, añade usted las palabras: "También esto nos lo han enseñado los antiguos, y ¿tiene su definición de cortadura un contenido distinto de éste? Opino que no. Lo que usted menciona acerca de la completud del dominio, que se deduce de sus principios, coincide de hecho con la propiedad básica de la linea, sin la cual ningún hombre puede imaginarse una linea." La primera parte de este pasaje, de la que quiero hablar primero, suena exactamente como si me atribuyese la opinión de que yo fuera el primero que ha observado y resaltado el fenómeno, que únicamente por *abreviar*, ya que se menciona tan a menudo en mi escrito, he designado con un nombre especial –cortadura–. Le ruego que abandone totalmente esta idea; nunca he creído haber dado a luz en mi escrito un único fenómeno nuevo o algún nuevo objeto de investigación matemática. El fenómeno de la cortadura se introduce en casi todos los manuales de aritmética, cuando se trata de representar números irracionales por medio de aproximaciones arbitrarias mediante números racionales (con lo que, por cierto, se comete siempre un error lógico fundamental). Como tampoco he creído que, a través de mi definición de los números irracionales, había creado algún número que no estuviera ya, con mayor o menor claridad, en la mente de cualquier matemático; esto se desprende de mi aclaración expresa (pag. 10 y 30 [§7]) de que la completud o continuidad (A) del dominio de los números reales, obtenida mediante mi definición de los números irracionales, es esencialmente equivalente al teorema reconocido y empleado por todos los matemáticos (B): "Si una magnitud crece constantemente, pero no más allá de todo límite, se aproxima a un valor límite". Igualmente he observado expresamente (pag. 18 [§3]) que no creía haber dicho nada nuevo a nadie mediante la proposición (C): "Si se dividen todos los puntos ... ese corte

de la recta en dos partes". Finalmente, tampoco considero nueva la proposición mencionada en mi última carta (D): "si todas las magnitudes ... una magnitud mínima". Antes bien, toda la tendencia de mi escrito, que creo haber caracterizado claramente en la introducción y en el §3, surge exclusivamente de probar, empleando el fenómeno bien conocido de la cortadura (cosa que por lo que sé nunca se había realizado), que sobre el único fundamento de la aritmética de los números racionales, y por tanto sin ninguna apelación al concepto bastante oscuro y complicado de magnitud, los números irracionales pueden ser definidos de un golpe, y lo que es más importante, precisamente con aquella completud (continuidad) que es suficiente y también imprescindible para una construcción absolutamente rigurosa y científica de la aritmética de los números reales. Que esto se ha logrado no lo pone usted en duda, según creo (y lo mismo vale de las exposiciones de los señores Heine y Cantor de Halle, que sólo se diferencian de la mía externamente); nuestra diferencia de opinión se refiere *exclusivamente* a la opinión expresada por usted de que estos principios están contenidos completamente, si bien en otra forma, en los *Elementos* de Euclides; y en su última carta reitera usted este juicio en parte expresamente, en parte implícitamente en la segunda mitad del citado pasaje, al declarar evidente la completud o continuidad –alrededor de la cual gira mi escrito, y ha de girar si es que ha de alcanzarse el resultado apetecido–, y en parte, por fin, al escribir: "La [...] definición de igualdad de dos proporciones [...] lo decide todo de un golpe. Si usted no reconoce esto, sólo me lo puedo explicar considerando que no ha tenido usted en cuenta que, en aquella definición, Euclides *presupone la existencia de proporciones que no son iguales a la proporción entre dos números enteros*. Usted tiene *de antemano la intención de presuponer sólo números racionales, y magnitudes medibles por medio de números racionales*. En este fragmento Euclides procede de otro modo, y aquí está el núcleo de sus diferencias con él. Euclides considera que una magnitud está determinada por la medida de una linea bien definida, y bajo este punto de vista puede mostrar lineas que, respecto a una linea dada, están en una proporción que no puede expresarse mediante dos números enteros." Sigue a continuación el *ejemplo* de la proporción de la diagonal al lado del cuadrado, cuya irracionalidad (en el sentido moderno) también he mencionado yo en mi escrito (pag. 16) como algo que los antiguos griegos conocieron. Desde los trece o catorce años conozco a Euclides y lo admiro, y aun ahora sigo sin ver hasta qué punto difiero de él; también en mi última carta he hablado expresamente de su tratamiento de las magnitudes inconmensurables, sin hacerle ningún reproche, de modo que tengo derecho a contradecir la opinión que usted me atribuye. Euclides puede aplicar su definición de proporciones iguales

a todas las magnitudes que *se encuentra* en su sistema, es decir, cuya *existencia* es manifiesta por buenas razones, y esto es totalmente suficiente para Euclides. Pero esto no basta de ningún modo para el fin de construir la aritmética sobre el concepto de proporción entre magnitudes (que no era la intención de Euclides); más bien, ya que la completud del concepto de número depende exclusivamente, en esta fundamentación de la aritmética, de la completud del concepto de magnitud, y ya que la completud continua de los números reales es imprescindible para la construcción científica de la aritmética, resulta indispensable *saber* de antemano con precisión hasta qué punto es completo el dominio de magnitudes, pues nada es más peligroso en matemática que *admitir* existencias sin prueba suficiente, sobre todo cuando nos mueve la necesidad del momento. ¿Qué nos permitirá reconocer los supuestos de existencia tolerados, y diferenciarlos de los incontables supuestos intolerables, como por ejemplo la suposición de una magnitud *A* que es el doble de *B* y a la vez el triple de la mitad de *B*? ¿Ha de depender del éxito, del descubrimiento casual de una contradicción interna? Si Euclides se hubiera propuesto investigaciones más amplias de lo que fue realmente el *caso*, a saber del tipo en que la *continuidad* desempeña un papel esencial, y si en los manuscritos se encontrara entre las definiciones o axiomas del libro quinto algo de contenido similar al pasaje anterior (D), opino que nadie lo hubiera declarado evidente o superfluo; más bien creo que en ese caso, entre aquellos que quieren construir la aritmética sobre el concepto de número como proporción de magnitudes, se hubiera encontrado con seguridad alguien que habría reconocido y habría dicho: "Con *esta* completud del concepto de magnitud, definida con precisión, se obtiene también la completud del concepto de número, que es necesaria e imprescindible para la construcción rigurosa de la aritmética de los números reales." Y creo que en tal caso dispondríamos de manuales de aritmética mejores que los que realmente tenemos. Pero Euclides guarda un silencio total acerca de este punto, el más importante para la aritmética, y por tanto no puedo aprobar su opinión de que en Euclides se pueden encontrar los fundamentos completos para la teoría de los números irracionales. Si Euclides no considera superfluo, en la definición del libro quinto que cita usted en latín en su penúltima carta, hacer explícita una propiedad tan simple de las magnitudes, es indudable que habría definido a su modo el carácter mucho más complicado de la continuidad (D), si lo hubiera *necesitado* en su sistema. Frente a esto dice usted que esta completud o continuidad es evidente y por tanto no necesita mencionarse, ya que ningún hombre puede pensar una *linea* sin ella, es decir sin la anterior propiedad (C). Aunque, como usted ya sospechaba, esta apelación a la

geometría para la fundamentación de la aritmética pura es totalmente contraria a mi inclinación, quiero situarme ahora en ese punto de vista. Pero incluso así no puedo convenir con usted; como ya he indicado con claridad al final del § 3 de mi escrito, bajo (C), *puedo* imaginarme todo el espacio y cada linea en él totalmente discontinuo; otro hombre de este tipo puede ser el señor prof. Cantor de Halle, al menos esto parece desprenderse del tratado suyo que he citado; y debería opinar que todo hombre puede hacerlo. Se me objetará quizá que me engaño en lo que toca a mi capacidad de representación espacial, pues todo aquel que es capaz de pensar el espacio continuo sería, por eso mismo, incapaz de imaginárselo discontinuo, porque los conceptos de espacio contienen de antemano la representación de la mayor completud pensable; pero para mí el concepto de espacio es más bien totalmente independiente, totalmente separable de la representación de la continuidad, y la propiedad (C) sirve sólo para seleccionar, partiendo del concepto *general* de espacio, el *especial* de espacio continuo. ¿Y qué sucede a este respecto con Euclides? Analícense todos los supuestos, tanto los explícitos como los realizados tácitamente, en los que descansa todo el edificio de la geometría euclidea, concédase la verdad de todos sus teoremas, la realizabilidad de todas sus construcciones (un método infalible para semejante análisis consiste para mí en reemplazar todas las expresiones técnicas por palabras recién inventadas (hasta entonces sin significado); no por ello debe derrumbarse el edificio, si está bien construido, y por ejemplo afirmo que mi teoría de los números reales soporta esta prueba): *nunca*, hasta donde yo he investigado, se alcanza de este modo la *continuidad* del espacio como una condición inseparablemente ligada a la geometría euclídea; todo su sistema se sostiene aun sin la continuidad –un resultado que ciertamente será para muchos asombroso, y que por eso me parecía muy digno de mención.

Con estas observaciones, que son sólo desarrollos de los pensamientos expresados en mi escrito, creo haber caracterizado mi punto de vista con tanta precisión, que no necesito añadir nada más. Antes bien debo pedirle encarecidamente que perdone la prolijidad de mis aclaraciones; usted ya sabe qué hondamente tocan estas cuestiones a mi corazón analítico, y por eso confío en su indulgencia.

[...]

2. Correspondencia con Weber.

Heinrich Weber (1842-1913) fue amigo íntimo de Dedekind y colaborador tanto en la edición de las obras de Riemann como en el importantísimo artículo 'Teoría de las funciones algebraicas de una variable'(1882). Entre las múltiples actividades de Weber, que fue un matemático realmente polifacético, hay que destacar su *Manual de Algebra* (1894-96), que marcó época y que todavía hoy es citado. Esta obra divulga las ideas de Dedekind sobre la construcción del sistema numérico.

Dedekind y Weber se conocieron en el otoño de 1873 en Zürich, y entraron en contacto más directo a raíz de que Dedekind le propusiera encargarse de la labor de edición de las obras de Riemann, cosa que sucedió a finales de 1874. A partir de ahí se desarrollaría rápidamente una amistad que duraría toda la vida. Weber fue, tras Lipschitz, uno de los primeros matemáticos en interesarse por la teoría de ideales de Dedekind, y de ahí surgió hacia 1878 una correspondencia que daría lugar al artículo citado. Pero en la correspondencia entre ambos se tratan también los temas de fundamentación de la aritmética que tanto interesaban a Dedekind. En general, puede conjeturarse que la correspondencia con Weber –desgraciadamente no editada– puede ser la más interesante para conocer la obra y la personalidad de Dedekind.

Las cartas que traduzco a continuación están tomadas del tercer tomo de las obras completas de Dedekind, salvo las de Weber y el párrafo final de la última carta, que provienen del apéndice L del libro de Dugac (o.c., 272-273). Las primeras tratan la cuestión de la enseñanza de la teoría de cortaduras en colegios, y no necesitan más aclaraciones. La tercera es más interesante: en ella se discute una definición del número que evidentemente Weber había propuesto en una carta anterior (no conservada). Weber había planteado algo que es muy semejante a la teoría de Frege: los números se analizan como cardinales, empleando la idea básica de equipotencia de conjuntos, es decir, de aplicación biunívoca entre conjuntos; quedan definidos como clases de conjuntos finitos equipotentes. Desde un punto de vista matemático las dos teorías podrían considerarse satisfactorias, si no fuera porque la de Frege apela a conjuntos 'muy grandes', con lo que introduce la posibilidad de antinomias. Por el contrario, la teoría de Dedekind puede reformularse fácilmente dentro de la teoría de conjuntos axiomática, y su extensión transfinita no plantea problemas. Por este motivo los teóricos de conjuntos han optado por proponer modelos particulares de 'conjunto simplemente infinito' en el sentido de Dedekind: es el caso de los números de Zermelo o de von Neumann. Aparte de esto podrían discutirse motivos epistemológicos para optar por una u otra teoría: Frege analiza los números desde un punto de vista realista y esencialista, mientras que Dedekind ofrece un análisis estructuralista. Desgraciadamente no sabemos si las ideas de Weber eran originales o si había leído los *Grundlagen der Arithmetik* [Fundamentos de la aritmética]

(1884) de Frege; resulta probable que sí lo hiciera, y que fuera él quien prestó ese libro a Dedekind en 1889, junto con la *Begriffschrift* [Conceptografía] (1879) del mismo autor (carta a Keferstein, punto 6).

En el párrafo final de la carta se discute otro tema interesante: uno de los mayores defectos de la exposición que hace Dedekind de la teoría de conjuntos es no diferenciar pertenencia e inclusión, y Frege le criticó duramente a este respecto (cf. *Grundgesetzte der Arithmetik* Hildesheim: Olms, 1966, pp. 2-3); esta carta sale anticipadamente al paso de esas críticas, y conecta directamente con el manuscrito 'Peligros de la teoría de sistemas'.

Dedekind a Weber, 8 de noviembre de 1878.

[..] Me alegra tu defensa de continuidad e irracionalidad; la conexión con la exposición de Heine (o más bien de Cantor) la he indicado también yo al final del § 6; pero el acortamiento que se logra con ello no es considerable, y creo que incluso para colegiales, que todavía no saben nada de valores límite de magnitudes variables, mi definición de la suma, diferencia, etc. es más fácil de comprender, y con una exposición adecuada no ofrece ninguna dificultad. De hecho soy tan optimista como para pensar que también en bachillerato se puede enseñar la aritmética rigurosamente; pues hasta el momento las enseñanzas en cuestión no ofrecen propiamente más que un ejemplo de la facilidad con que se puede engañar a los alumnos tan pronto como se tiene el valor de renunciar al empleo de la lógica. ¡Fantástico medio para desarrollar las facultades mentales de la juventud, esa aritmética tal como se enseña! Fick ha roto una lanza en pro de las escuelas profesionales [Realschulen] recientemente, pero no estoy de acuerdo con él sobre el valor de la enseñanza de la matemática en bachillerato, y quizá escriba pronto sobre el tema. [...]

Weber a Dedekind, 13 de noviembre de 1878.

[...]

Al final de tu carta tocas una cuestión que me interesa muchísimo y sobre la que he reflexionado a menudo sin llegar a ninguna convicción muy definida, la de la enseñanza de la matemática en bachillerato. No cabe ninguna duda de que hay que reformar algunas cosas; pero creo que tu método es quizá demasiado riguroso. Conozco un intento de configurar rigurosamente la enseñanza matemática elemental, que quizá también te sea conocido, el *"Manual de aritmética y álgebra* del Dr. E. Schröder, tomo 1. Leipzig, Teubner 1873". Las primeras explicaciones que da sobre los números enteros me han gustado mucho. Pero en todo

el tomo, que abarca 350 páginas, no llega finalmente más allá de los números enteros, y mucho de lo que dice me parece realmente innecesario. En los primeros conceptos, números enteros y fracciones racionales, se puede y se debe apelar a la intuición que tiene todo el mundo. El análisis ulterior de esa intuición es una cuestión filosófica, para cuya comprensión hace falta ya una madurez mucho mayor. Tampoco veo nada incorrecto en decir que buscar $\sqrt{2}$ significa buscar un número cuyo cuadrado se diferencia de 2 tan poco como hayamos prescrito, y que con ello queda demostrado $\sqrt{2}.\sqrt{3}=\sqrt{6}$. La continuidad, que plantea la dificultad principal, no necesita en absoluto discutirse en bachillerato. Por lo demás, dejaré con gusto que me instruyas en estas cosas, sobre las que has reflexionado mucho más profundamente que yo, e incluso me has convertido ya en algunos puntos. Espero tu libro *¿Qué son y qué quieren [sic: wollen] los números?* con gran interés. Tendría alguna cosa más que decir pero no es cómodo hacerlo por escrito. [...]

Dedekind a Weber, 19 de noviembre de 1878.

[...] Me alegra mucho que el tema de la enseñanza de la aritmética en bachillerato te interese tanto, y creo que hablando sobre ello nos pondríamos de acuerdo. Conozco bien el libro de Schröder; no se dirige a los alumnos, sino a los profesores; no es ningún manual. Contiene muchas cosas buenas, pero también muchas superfluas. Claro que no quiero exigir más de las cabezas de los alumnos, sino menos. No es en absoluto necesario hablar de continuidad; pero los alumnos deberían obtener una clara imagen del dominio de los números, y ante todo de los números racionales; la distinción según mayor y menor (por sustracción) tiene que metérseles en las venas [in Fleisch und Blut übergehen]. Entonces estarán perfectamente preparados para lo irracional. Y aquí quizá tenemos opiniones diferentes, si entiendo bien tu carta. Escribes: "No puedo ver nada incorrecto en que se diga que buscar $\sqrt{2}$ es buscar un número cuyo cuadrado se diferencie de 2 tan poco como se haya prescrito, y que entonces $\sqrt{2}.\sqrt{3}=\sqrt{6}$ queda demostrado." En primer lugar, no me gusta que se defina más la operación que el resultado de la operación; prefiero, por ejemplo, que la suma se defina como un número totalmente determinado por los sumandos, y no que se defina la adición; esto ya al nivel de los números racionales. Ahora imagínate un alumno que ha comprendido bien la aritmética racional, y al que precisamente el profesor le ha demostrado con todo rigor que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ no existen; ¿no quedará desconcertado si pese a todo se habla de $\sqrt{2}$, aunque quizá no del propio $\sqrt{2}$, sino de la búsqueda de $\sqrt{2}$?

Además, en la aritmética racional ha aprendido a asociar una idea muy concreta con la palabra producto; ¿puede comprender el signo $\sqrt{2}.\sqrt{3}$? Me parece que comprenderá con mucha más facilidad el fenómeno de una 'cortadura', en el que sus bien conocidos números racionales se consideran de una forma tan precisa, en conexión con la cuestión de si pertenecen a una clase o la otra; algunos ejemplos le aclararán totalmente la esencia de ese fenómeno; la exactitud de esa noción es benefactora para su pensamiento, y tampoco se resistirá demasiado si ese fenómeno se emplea para la introducción de nuevos *números*: tantas cortaduras, tantos números. También las definiciones de sumas, diferencias, etc. de los nuevos números son muy fáciles de establecer. Tú quieres que los alumnos aprendan a calcular con $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc.; ¿quieres que al hacerlo sólo vean en ellos símbolos de aproximaciones? ¿no te parece mejor que vean en ellos símbolos de nuevos *números* con iguales derechos que los antiguos? ¿Cuál de las dos ideas fomentará un pensamiento más preciso y claro, cuál educará mejor la mente? Pero es muy difícil ponerse de acuerdo por escrito.

También me preguntas por mi investigación sobre los orígenes de la aritmética: *¿Qué son y para qué sirven los números?*. Está parada, y dudo si llegaré a publicarla; sólo existe en forma de un borrador grosero, con el lema: "Lo que es demostrable, no debe aceptarse en la ciencia sin demostración." El tema fundamental es la distinción de lo contable y lo incontable, y la noción de número cardinal, y la fundamentación de la llamada inducción completa. [...]

Weber a Dedekind, 28 de noviembre de 1878.

[...]

Con respecto a los números irracionales me has comprendido mal si crees que he querido oponerme a tu opinión. Concedo totalmente que tu exposición es la más elegante y precisa, y también que sería deseable introducirla en la enseñanza escolar, si no comportara otros defectos. Sólo me escandalizaba del rigor excesivo de tu juicio sobre la enseñanza matemática, cuando niegas todo valor educativo a lo que desde el tiempo del antiguo Pitágoras se ha considerado siempre como el más ventajoso medio de formación del espíritu. Por eso quería defender el viejo punto de vista. Lamentaría mucho que abandonases o aplazases mucho tu plan de escribir sobre el concepto de número. Con eso harías un gran servicio a algunos. Me interesaría muchísimo que me confiases tu manuscrito por poco tiempo, tal como está, para leerlo. [...]

Dedekind a Weber, 24 de enero de 1888.

[...] Me alegra mucho que te intereses tanto por mi escrito sobre los números; habrá muy pocos que lo hagan. Cantor me ha hecho notar que ya en 1877 (Crelle tomo 84, p. 242) resaltó la distinción entre lo finito y lo infinito, pero que no piensa hacer ninguna reclamación de prioridad. Sobre esto se podría decir mucho; en cierto sentido tiene razón, y sin embargo en 1882 dudaba la posibilidad de una definición sencilla y se quedó muy sorprendido cuando, inducido por sus dudas y a petición suya, le comuniqué la mía; a veces se posee algo sin valorar apropiadamente su valor y significado. Pero yo tampoco tengo la menor gana de una disputa de prioridad. –He leído y meditado repetidamente tus observaciones y propuestas; pero es difícil juzgar si permitirían obtener una simplificación y reducción esencial, sin ver ante uno el nuevo enfoque desarrollado completamente. Por lo demás, debo confesarte que hasta ahora siempre he considerado el número ordinal, no el número cardinal (cantidad), como el concepto original de número. Quizá hubiera sido mejor no mencionar en absoluto esos nombres (ordinal, cardinal) en mi escrito, dado que en la gramática habitual se emplean en otro sentido. Naturalmente, mis números ordinales, los elementos abstractos del sistema ordenado simplemente infinito, no tienen nada que ver con la forma adjetiva de los *llamados*, en gramática, números ordinales, forma que podría dar lugar a una razón para la prioridad conceptual de los números cardinales (cantidades); esa forma adjetiva se emplea también en casos en que no se trata en absoluto de una ordenación (es decir, de mis números ordinales), por ejemplo cuando se habla de la quinta parte de un segmento. Al número cardinal (cantidad) lo considero sólo como una *aplicación* del número ordinal, y también en nuestro ἀριθμητίζειν el concepto de cinco sólo se alcanza a través del concepto de cuatro. Pero si se quisiera seguir tu camino –y recomendaría mucho que alguna vez se desarrollara completamente–, me gustaría aconsejar que no se entienda por número (cantidad, número cardinal) la *clase* misma (el sistema de todos los sistemas finitos similares), sino mejor algo *nuevo* (correspondiente a esa clase) que el espíritu *crea*. Somos de linaje divino[3] y poseemos sin duda alguna capacidad creativa, no sólo en asuntos materiales (ferrocarriles, telégrafos) sino muy especialmente en asuntos espirituales. Se trata exactamente de la misma cuestión de la que hablas al final de tu carta concerniente a mi teoría de los irracionales, donde propones que el número irracional no sea ninguna otra cosa que la propia cortadura, mientras que yo prefiero crear algo *nuevo* (distinto de la cortadura) que corresponda a la cortadura, y de lo que digo que produce o causa la cortadura. Tenemos derecho a atribuirnos tal capacidad

creadora, y además es mucho más conveniente hacerlo así para que todos los números sean homogéneos. También los números racionales producen cortaduras, pero ciertamente no los haré pasar por idénticos con las cortaduras que producen; y tras la introducción de los irracionales se hablará a menudo de fenómenos de cortadura con tales expresiones, se les adjudicarán tales atributos, que aplicados a los números correspondientes sonarían muy extraños. Algo similar puede decirse de la definición del número cardinal (cantidad) como *clase*: se dirán muchas cosas de la clase (por ejemplo, que es un sistema de *infinitos* elementos, a saber, *todos* los sistemas similares), que ciertamente sólo atribuiríamos al número muy a disgusto; ¿piensa alguien que el número cuatro *es* un sistema de infinitos elementos, o no prefiere más bien olvidarlo enseguida? (Sin embargo, todo el mundo tendrá presente que el número 4 es hijo del número 3 y padre del número 5.) Por la misma razón he considerado siempre totalmente legítima la *creación* de los números ideales de Kummer, en la medida en que se desarrolle con rigor. Finalmente, no tiene importancia la cuestión de si el lenguaje simbólico es suficiente para designar particularmente todos los individuos nuevos que hay que crear; siempre basta para designar los individuos que intervienen en cualquier investigación (limitada).

[...]

Me preguntas si puedo demostrar el siguiente teorema: 'Si un sistema se contiene a sí mismo como elemento, necesariamente es infinito'. Yo tendería a pensar, antes bien, que tal sistema consiste en un único elemento (sí mismo). Esto está relacionado con un escollo peligroso del que he sido muy consciente al redactar el escrito, pero que no he discutido confiando en la buena voluntad del lector. Hubiera debido añadir en 2, donde se habla de un sistema S consistente en un único elemento a, las palabras: 'y en este caso se puede *–con el debido cuidado–* entender por el sistema S el propio elemento a'. Así sucede de hecho en 3 (cf. también la advertencia el final de 8), en 70, 102, 104 y en muchos otros lugares, con lo que se obtiene una simplificación del lenguaje simbólico. Con todo opino que, para evitar ciertas contradicciones, hubiera sido mejor diferenciar el sistema consistente en un único elemento a del propio a al menos simbólicamente. Pero el desarrollo preciso de estas dificultades nos llevaría hoy demasiado lejos, y es especialmente apropiado para una discución *oral*. ¿No podríamos hablar en Pascua? ¿Aquí o en tu casa?

[...]

3. Correspondencia con Keferstein.

Hans Keferstein era profesor de matemática en un instituto de Hamburgo, y en 1890 publicó un artículo 'Sobre el concepto de número' donde relacionaba las ideas de Dedekind con las de Frege, proponiendo una síntesis y determinadas correcciones. Dedekind se interesó por el trabajo de Keferstein (cosa natural, ya que era la primera reacción pública a su libro) y escribió un artículo de réplica titulado 'Sobre el concepto de infinito'. Allí dice: "debo oponerme con decisión a todas las mejoras y correcciones aportadas por Keferstein [...] Si se quisiera adoptar esas mejoras y esas presuntas correcciones a un edificio que me parece construido según los cánones del arte, perfectamente compacto en todas sus partes, inquebrantable, no quedaría más que un cúmulo de escombros totalmente inservible, como mostraré más adelante, para edificar la ciencia de los números." El punto más importante de la discusión estriba en que Keferstein creyó que se podría prescindir del concepto de cadena, definiendo 'conjunto simplemente infinito' sin hacer referencia a la condición de ser cadena del elemento base 1; Dedekind demuestra en su réplica que todo conjunto infinito es un 'conjunto simplemente infinito de Keferstein', de modo que esa condición es indispensable.

El artículo debía publicarse en el informe anual de la sociedad matemática de Hamburgo, junto con una nota de Keferstein en la que mantenía su discrepancia en el tema de la noción de cadena. Dedekind le escribió una carta para intentar convencerle de que su crítica era totalmente errónea, y en ella hace una reconstrucción interesantísima de la manera en que analizó el conjunto de los números naturales hasta llegar al planteamiento del libro. Esa es la carta que traduzco aquí, y que ya en 1957 llamó la atención del lógico Hao Wang porque le ofrecía la posibilidad de analizar cómo Dedekind llegó a los llamados "axiomas de Peano", y cómo concluyó que eran suficientes para dar una caracterización categórica de la aritmética. El punto más interesante de la carta se relaciona de nuevo con las cadenas, y es el punto 6; en él encontramos nada menos que un razonamiento que podemos considerar precedente de la teoría de modelos. Para ver si su definición es correcta, Dedekind analiza los posibles conjuntos que la satisfacen, y encuentra la posibilidad de que el conjunto definido sea inadecuado para la aritmética por contener más elementos de los necesarios; en términos modernos, encuentra la posibilidad de que en el modelo aparezcan elementos no estándar. Para evitarlo, es decir, para hacer que la definición sea categórica, se necesita la noción de cadena. El correlato de este razonamiento se encuentra con toda claridad en el borrador del libro, en un manuscrito que puede datarse en 1872.

Ni el artículo sobre el infinito ni la carta fueron publicados en su momento (la sociedad matemática de Hamburgo alegó excesiva longitud) y Dedekind no tuvo la idea de mandarlos a otras revistas, de modo que "el gran esfuerzo que tuve que emplear en ese artículo, y en los comentarios posteriores que le envié por carta" fueron en vano. Ni siquiera consiguió convertir a Keferstein a su punto de vista. Pero afortunadamente han sido más útiles desde hace unos 40 años.

Dedekind a Kerferstein, 27 de febrero de 1890.

[...]
Le doy mis más sinceras gracias por su amable carta del 14 de este mes y por su voluntad de procurarle audiencia a mi réplica. Pero quisiera pedirle que no se precipite en este asunto y que sólo tome una decisión después de haber leido cuidadosamente y considerado una vez más las definiciones y demostraciones más importantes de mi ensayo sobre los números, si es que tiene tiempo para ello. Me parece lo más probable que entonces se convierta usted en todos los puntos a mi concepción y mi tratamiento del asunto; y esto sería lo más valioso para mí, porque estoy convencido de que realmente tiene usted un profundo interés por la materia.

Para facilitar en lo posible esa aproximación, me gustaría pedirle que prestara atención a la siguiente serie de pensamientos, que expone la génesis de mi ensayo. ¿Cómo surgió mi escrito? Ciertamente no en un dia, sino que es una síntesis construida tras un largo trabajo, basada en el análisis previo de la serie de los números naturales tal como se ofrece a nuestra consideración, por así decir, en la experiencia. ¿Cuáles son las propiedades básicas, independientes entre sí, de esta serie *N*, es decir, aquellas propiedades que no pueden deducirse unas de otras pero de las cuales se siguen todas las demás? Y ¿de qué manera hay que despojar a estas propiedades de su carácter específicamente aritmético, de manera que queden subordinadas a conceptos más generales y a actividades del entendimiento tales que *sin* ellas no es posible en absoluto el pensamiento, pero *con* ellas viene dado el fundamento para la seguridad y completud de las demostraciones, así como para la construcción de definiciones libres de contradicción?

Si la cuestión se plantea de esta manera, nos vemos llevados a la fuerza, según creo, a los siguientes hechos:

1) La serie numérica *N* es un *sistema* de individuos o elementos que se llaman números. Esto conduce a la consideración general de los sistemas en cuanto tales (§ 1 de mi escrito).

2) Los elementos del sistema *N* están en una cierta relación unos con otros, reina un cierto orden que consiste ante todo en que a cada número determinado *n* le *corresponde* un determinado número *n'*, el número sucesor o inmediatamente mayor. Esto nos lleva a la consideración del concepto general de *representación* ϕ de un sistema (§ 2), y como la imagen $\phi(n)$ de cada número *n* es de nuevo un *número n'*, o sea $\phi(N)$ es parte de *N*, se trata de una representación ϕ de un sistema *N en sí mismo*, que por tanto habrá que investigar en general (§ 4).

3) A diferentes números *a*, *b* les siguen números *a'*, *b'* también diferentes; la representación ϕ tiene por tanto el carácter de claridad o *similaridad* (§ 3).

4) No todo número es un número sucesor *n'*, es decir, $\phi(N)$ es parte propia de *N*, y en esto consiste (en conexión con lo anterior) la *infinitud* de la serie numérica *N* (§ 5).

5) Y en particular el número 1 es el *único* número que no se encuentra en $\phi(N)$. Con esto quedan enumerados aquellos hechos en los que ve usted (pag. 124, líneas 8-14) la caracterización completa de un sistema ordenado simplemente infinito.

6) Pero he mostrado en mi réplica (III) que esos hechos están lejos de ser suficientes para abarcar completamente la esencia de la serie numérica *N*. Todos esos hechos serían válidos también para todo sistema *S* que, además de la serie numérica *N*, contuviera un sistema *T* de cualesquiera otros elementos *t*, a los que siempre se podría extender la representación ϕ de tal modo que mantuviera el carácter de similaridad siendo $\phi(T) = T$. Pero tal sistema *S* es evidentemente algo muy distinto de nuestra serie numérica *N*, y podría elegirlo de manera que apenas se preservaría en él un único teorema de la aritmética. ¿Qué hay que añadir pues a los hechos precedentes para depurar nuestro sistema *S* de esos intrusos *t* que perturban todo orden, restringiéndolo a *N*? Éste fue uno de los puntos más difíciles de mi análisis, y superarlo requirió una larga reflexión. Presuponiendo el conocimiento de la serie de los números naturales *N* y permitiendo así el empleo del lenguaje de la aritmética, no encontraremos dificultades; sólo necesitamos decir: un elemento *n* pertenece a la serie *N* si y sólo si partiendo del elemento 1 y contando sin parar, es decir, por medio de una cantidad finita de repeticiones de la representación ϕ (cf. el final del 131 de mi ensayo), se llega de hecho alguna vez al elemento *n*; de esta manera, sin embargo, nunca llegaré a un elemento *t* ajeno a la serie *N*. Pero esta forma de caracterizar la diferencia entre los elementos *t*, que hay que desalojar de *S*, y los elementos *n*, que son los únicos que deben quedar, es totalmente inútil para nuestro objetivo, y contiene el tipo peor y más peligroso de círculo vicioso. Naturalmente, las simples palabras 'finalmente se alcanza en algún momento' tampoco lo consiguen; no nos serían más útiles que, digamos, las palabras 'karam sipo tatura', que invento en este instante sin darles ningún significado claramente definido. Por tanto, ¿cómo puedo, sin presuponer ningún conocimiento aritmético, determinar conceptualmente con certeza la diferencia entre los elementos *n* y los *t*? ¡Simplemente gracias a la consideración de las *cadenas* (37, 44 de mi ensayo), y por medio de ellas completamente! Si quisiera evitar mi término técnico 'cadena' diría: un elemento *n* de

S pertenece a la serie *N* si y sólo si *n* es elemento de *toda* parte *K* de *S* que posee la doble propiedad de que el elemento 1 está contenido en *K* y que la imagen $\phi(K)$ es parte de *K*. En mi lenguaje técnico: *N* es la comunidad 1_0 o $\phi_0(1)$ de todas aquellas cadenas *K* (de *S*) en las que está contenido el elemento 1. Sólo con esto se ha determinado la caracterización completa de la serie *N*. –A esto comentaré, de paso, lo siguiente. La *Conceptografía* y los *Fundamentos de la aritmética* de Frege vinieron a mis manos por vez primera durante un breve período del verano pasado (1889), y vi con placer que la manera como define la sucesión mediata de un elemento a otro en una serie coincide *en lo esencial* con mi noción de cadena (37, 44); únicamente hay que evitar asustarse de su terminología algo incómoda.

7) Una vez determinada en mi análisis (71, 73) la caracterización esencial del sistema simplemente infinito, cuyo tipo abstracto es la serie numérica *N*, surgía la cuestión: ¿*existe* realmente en nuestro universo mental un tal sistema? Sin la demostración lógica de existencia sería siempre dudoso si el concepto de tales sistemas no contiene quizá contradicciones internas. De ahí la necesidad de tales pruebas (66, 72 de mi escrito).[1]

8) Una vez establecido esto, surgía la cuestión: ¿contiene también lo dicho hasta aquí un *método de prueba* suficiente para demostrar en general proposiciones que se suponen válidas para *todos* los números *n*? ¡Sí! La famosa demostración por inducción descansa sobre el seguro fundamento de la noción de cadena (59, 60, 80 de mi escrito).

9) Finalmente: ¿es posible también establecer las *definiciones* de las operaciones numéricas para *todos* los números *n*, sin contradicciones? ¡Sí! Esto es realizado de hecho por el teorema 126 de mi escrito.–

Con esto se había terminado el análisis y podía comenzar la construcción sintética; ¡y todavía me causó bastantes problemas! Realmente, tampoco el lector de mi ensayo tiene una tarea fácil; además de un sano sentido común, se requiere una voluntad muy fuerte de rehacerlo todo completamente.–

[... Dedekind termina con comentarios sobre algunos pasajes del artículo de Keferstein, entre los que me parecen interesantes los siguientes:]

[...] Aquí tenemos una confusión entre 'representación' e 'imagen'; en vez de 'representación $\phi(S')$' debería decirse 'representación ϕ del sistema *S*''. La representación (el pintor que pinta [representa]) no es $\phi(S')$ sino ϕ, que a partir del *sistema S'* (original) produce la *imagen* $\phi(S')=S$. Semejantes confusiones pueden llegar a ser muy peligrosas en

nuestras investigaciones.

[...] Defino el *número* 1 en 71, 73, sin ninguna ambigüedad, como el elemento base de la serie numérica, y al *número cardinal* 1 se llega igualmente en el teorema 164, como consecuencia de la definición general 161. No *debería* añadirse nada más si no se quiere oscurecer el asunto.

[...] El significado de estas líneas (así como de las precedentes y las siguientes) no me resulta muy claro. ¿Expresan quizá el deseo de que mi definición de la serie numérica N y de la sucesión del elemento n al elemento n' se apoyara, si es posible, en una serie *intuitiva*? Si así fuera, me resistiría con la mayor determinación, porque inmediatamente aparecería el peligro de tomar como evidentes, a partir de tal intuición, proposiciones que deberían derivarse de manera totalmente abstracta a partir de la definición lógica de N. Si *llamo* a n' el elemento *sucesor* de n (73), se trata sólo de un nuevo *término técnico* mediante la cual meramente introduzco algo de variedad en mi *lenguaje*; este lenguaje hubiera sonado todavía más monótono y repelente si hubiera renunciado a esa variedad y hubiera tenido que llamar siempre a n' la *imagen* $\phi(n)$ de n. Pero una expresión *significa* exactamente lo mismo que la otra.

[...]

NOTAS DEL EDITOR

Notas a *Continuidad y números irracionales.*

1 Heinrich Durège (1821-1893) se habilitó como Privatdozent de matemáticas en el Politécnico de Zürich, en 1858; en otoño de 1862, tras haberse marchado Dedekind, fue nombrado profesor; desde 1864 desarrolló su actividad en la escuela técnica y la universidad alemanas de Praga. Estudió matemáticas en Berlin y Königsberg, después de haberse dedicado brevemente a la medicina; entre sus profesores se cuentan Dirichlet y el físico matemático Franz Neumann. Escribió manuales muy vendidos sobre teoría de funciones complejas, curvas algebraicas y funciones elípticas. Vale la pena mencionar que antes de llegar a Zürich, entre 1849 y 1857, residió en Milwaukee (EEUU).

2 'Elementos de la teoría de funciones', *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 74 (1872), 172-188. Eduard Heine (1821-1881) estudió en Berlin, Göttingen y Königsberg, se doctoró bajo la dirección de Dirichlet y se habilitó en Bonn; en 1848 llegó a Halle, donde permanecería el resto de su vida; se distinguió por elegir Privatdozenten de primer rango, entre los que se encontraron C. Neumann, Schwarz y Cantor. Escribió un conocido manual de funciones circulares, y fue uno de los individuos preocupados activamente por la rigorización del análisis, estando muy al tanto del trabajo de Weierstrass. En el artículo citado definía los números reales al modo de Cantor.

3 'Sobre la generalización de un teorema de la teoría de series trigonométricas', reimpreso en *Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts* (Hildesheim: G. Olms, 1966), 92-101, y también en *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. Arbeiten zur Mengenlehre aus den Jahren 1872-1884* (Leipzig: Teubner, 1984), 9-18. El artículo contiene su definición de los números reales, y la idea de introducir "reales de tipos superiores" a la que se refiere Dedekind más abajo.

4 Dedekind desarrolla la cuestión planteada en este párrafo en sus cartas a Lipschitz y en el primer prólogo a *¿Qué son y para qué sirven los números?*. El tema es fundamental para toda la concepción que Dedekind tiene de la matemática: la continuidad, que en geometría solo puede ser *postulada*, es objeto de *demostración* en la aritmética gracias a la construcción conjuntista de los números reales. Dedekind interpretó esto en el sentido de que la aritmética, a diferencia de la geometría, es simplemente una rama de la lógica. Por este motivo puede conjeturarse que la construcción de los números reales fue el desencadenante del logicismo de Dedekind, y lo mismo podría ser cierto en general de otros matemáticos de su época.

5 Al traer a colación el problema de la continuidad de las operaciones aritméticas, Dedekind, "siguiendo una característica constante de su pensamiento, [...] se sitúa en un marco mucho más general" de lo que el asunto exige. "Tenemos aquí un embrión de la futura teoría de álgebras topológicas y de las teorías que utilizarán simultáneamente las estructuras del álgebra y del análisis." (Dugac, *Dedekind et les fondements des mathématiques;* París: Vrin, 1976, p.46)

Notas a *¿Qué son y para qué sirven los números?*

1. De Ernst Schröder me ocuparé en una nota posterior. Leopold Kronecker (1823-1891) fue un influyente matemático afincado en Berlin, que fue algo así como un *alter ego* de

Dedekind, pues trabajó exactamente en los mismos campos. Dedekind lo consideraba genial: "Siempre he estado muy lejos de querer comparar mi *aurea mediocritas*, cuya fuerza reside solo en la obstinada perseverancia, con el extraordinario talento de Kronecker [...]" (carta a Frobenius, 8.02.1895, reproducida en Dugac, *Richard Dedekind*, o.c., apéndice LIV, p. 283). Kronecker estudió en Berlin con Dirichlet, pero su principal maestro fue E. Kummer (1810-1893), que fue su profesor en bachillerato y ya entonces le introdujo en las matemáticas superiores. Hijo de una familia adinerada, después de ocuparse de los negocios por algún tiempo, se trasladó a Berlin y trabajó en estrecho contacto con Kummer y Weierstrass. No ocupó una plaza universitaria hasta 1883, tras la muerte de Kummer, pero desde 1861 fue miembro de la Academia de Ciencias y como tal dio clases; su influencia en cuestiones universitarias fue progresivamente en aumento. Teoría de números, teoría de números algebraicos, álgebra y teoría de funciones entran en profundos contactos en su obra, fructificándose mutuamente. Kronecker se hizo célebre por su posición rígidamente constructivista, que le llevó a realizar duras críticas, sobre todo en privado, a las construcciones de los números reales y a la teoría de conjuntos. Esto enfrió su amistad con Weierstrass e influyó en las crisis depresivas de Cantor. Su artículo 'Über den Zahlbegriff', que expresa esa posición constructivista, puede encontrarse en *Werke* (Nueva York: Chelsea, 1968), vol. 3, pp. 249-274.

Hermann von Helmholtz (1821-1894) pasa por ser el último genio universal, que abarcó desde la filosofía a las matemáticas, la física, la fisiología y la medicina. Estudió medicina en Berlín, pero ya mientras ejercía la profesión escribió 'Sobre la conservación de la fuerza', contribuyendo fundamentalmente a la aparición del principio de conservación de la energía. Dio clases de fisiología, uno de sus principales campos de investigación, en Königsberg, Bonn y Heidelberg, y en 1871 ocupó la cátedra de física en Berlin, siendo también un importante consejero científico del gobierno. A su interés por cuestions de física teórica (hidrodinámica y electrodinámica) se une su contribución a la fundamentación de la geometría. Con su aportación a una visión positiva del conocimiento y sus análisis de la formación de conceptos en la ciencia empírica, puede considerársele un precedente del Círculo de Viena. 'Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet' puede encontrarse en *Schriften zur Erkenntnistheorie* (Berlín, 1923), pp. 70-108.

2 Es interesante notar que tanto Dedekind como Kronecker (en el artículo 'Über den Zahlbegriff' al que se refiere la nota 1) amplían la noción de aritmética para abarcar también el álgebra y el análisis. Lo mismo hace Schröder al identificar la aritmética con "la teoría completa de los números y sus funciones" (teoría de números, álgebra, análisis, teoría de funciones, etc.; Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, vol. 1(1890), Nueva York: Chelsea, 1996, p.441).

3 Esta respuesta de Dedekind puede verse como réplica a la opinión de Kronecker, tantas veces citada: "El buen Dios hizo los números naturales; todo lo demás es obra del hombre" (H. Weber, 'Leopold Kronecker', *Mathematische Ann alen.* 43 (1893), p.23).

4 Ese borrador ha sido publicado recientemente (Dugac, o.c. ,p.293-309); un dato interesante es que su subtítulo decía: "intento de análisis del concepto de número desde el punto de vista ingenuo" (293). Por una nota de Dedekind nos consta que Schwarz, Weber y Cantor discutieron con él la definición de infinito (cf. la nota al punto 64 del libro); no sabemos exactamente quienes de ellos leyeron el manuscrito. De los otros dos matemáticos hablo en otros lugares, sobre Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) baste decir que fue alumno de Weierstrass y pariente político de Kummer, y que tras una intensa amistad con Cantor pasó a ser contado por éste entre las filas de sus enemigos.

5 La frase en griego significa "el hombre calcula [aritmetiza] siempre [eternamente]". Plutarco atribuyó a Platón la opinión de que "el dios geometriza eternamente" (*Conv. disp.*, VIII,2). Estas palabras fueron citadas a menudo en Alemania durante el XIX, con diversos cambios que iban reflejando la sustitución de la geometría por la aritmética como ciencia matemática fundamental. En el artículo que cita Dedekind en su primera nota, Kronecker atribuye a Gauss la frase "el dios calcula eternamente" (Kline atribuye la frase a Jacobi: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1973, p. 104); Dedekind abandona a Dios para referirse al hombre, dando un paso que es coherente con su postura epistemológica: la matemática no tiene que ver con ningún mundo de esencias u objetos permanentes, sino que es una libre creación humana.

Entre los manuscritos de Dedekind se ha encontrado el texto siguiente: "De todos los recursos con que cuenta la mente humana para hacer más fácil su vida, es decir el trabajo en que consiste el pensamiento, ninguno es tan fructífero y tan inseparable de su más íntima naturaleza como la noción de número. La aritmética, cuyo único objeto es ese concepto, es hoy en día una ciencia de dimensión incalculable, y no hay ninguna duda de que sus desarrollos ulteriores no tienen ningún límite; igualmente incalculable es el campo de sus aplicaciones, porque todo hombre que piensa, incluso si no se da cuenta de ello claramente, es un hombre de números [Zahlen-Mensch], un aritmético." (publicado por Dugac, o.c., 315)

6 Estas afirmaciones van dirigidas directamente contra Kronecker, que en el citado artículo había escrito: "Creo también que algún día será posible 'aritmetizar' todo el contenido de todas estas disciplinas matemáticas (álgebra, análisis), es decir, basarlas única y exclusivamente en el concepto de número tomado en el sentido más estricto, eliminando por tanto las modificaciones y extensiones de este concepto [nota de Kronecker: me refiero aquí especialmente al añadido de las magnitudes irracionales y continuas], que en general han sido originadas por la aplicación a la geometría y la mecánica." (Kronecker, o.c., p.253) Esta rígida posición de Kronecker le llevó a hacer críticas que enfriaron su amistad con Weierstrass, y tuvieron casi neurótico a Cantor. Al demostrar que el número natural es también una creación humana, Dedekind pretendía asegurarle al matemático el derecho a crear con libertad sus conceptos, mostrando que los límites impuestos por Kronecker son arbitrarios.

7 Bernard Bolzano (1781-1848) fue un matemático, filósofo y teólogo de Praga que en el campo de las matemáticas y de la lógica adelantó muchas concepciones modernas, si bien puede decirse que su influencia fue en general escasa o nula. En el campo del análisis propuso una definición de función contínua idéntica a la de Cauchy, trató de demostrar rigurosamente el teorema del valor intermedio e intentó desarrollar una teoría rigurosa de los números reales en sus manuscritos; esto atestigua su modernidad, y de hecho es habitual citarle junto a Cauchy pese a la diferencia enorme entre la influencia ejercida por uno y otro. El campo de la lógica fue probablemente su terreno principal, y en *Wissenschaftslehre* (4 vols., Sulzbach, 1836) desarrolló las ideas de Leibniz con mucha fortuna; su rigor y su posición platónica respecto a los objetos de la lógica y las matemáticas recuerdan a Frege. Ya en su obra lógica desarrolló Bolzano nociones conjuntistas que luego recogió en su libro póstumo *Paradoxien des Unendlichen* (1851; reimpresión en Hamburgo, 1975, y traducción inglesa en Londres, 1950). Este libro, conocido por Cantor y Dedekind durante los años 1880, contiene una clara defensa del infinito actual y buenos atisbos de la teoría de conjuntos, aunque fracasa en puntos fundamentales como la formulación de la noción de cardinal.

8 *Los fundamentos de la aritmética* (Barcelona: Laia, 1972), obra que expone una teoría logicista de los números naturales, divergente de la de Dedekind. Gottlob Frege

(1848-1925) estudió filosofía, matemáticas y ciencias en Jena y Göttingen; durante toda su vida dio clases en Jena, sin obtener una influencia significativa. Su obra se difundió ante todo a través de pensadores de primer rango como Russell, Carnap, Wittgenstein y Husserl. El tema de su obra es ante todo la lógica, que trató con una claridad y un rigor poco comunes y que modificó, a la vez que Peirce, formalizando el cálculo proposicional, introduciendo cuantificadores, y dando lugar así a la lógica de primer y segundo orden (*Begriffschrift [Conceptografía]*, Halle:Nebert, 1879). Otro tema central de su actividad fue la fundamentación de la noción de número, donde destaca junto al libro anterior su *Grundgesetze der Arithmetik* (2 vols., Jena: Pohle, 1893, 1903).

9 *Lecciones sobre el álgebra de la lógica* (3 vols. 1890-1905, o.c.); esta obra monumental sistematizó las investigaciones del 'álgebra de la lógica' nacida de Boole y las completó ante todo por el desarrollo de la lógica de relaciones. Ernst Schröder (1841-1902) se habilitó en Zürich, trabajó varios años como profesor de bachillerato, y ocupó luego plazas en Escuelas Técnicas (Darmstadt y Karlsruhe); por esta actividad profesional se asemeja hasta cierto punto a Dedekind. Sufrió una fuerte influencia de las tendencias matemáticas abstractas de Grassmann y de Hermann Hankel (1839-1873), también influido por Grassmann. Conocido ante todo por la difusión de las ideas booleanas en Alemania, influyó en importantes lógicos como Löwenheim y Skolem. Su influencia sobre Dedekind fue importante a partir de los años 1890; en particular le motivó a estudiar la teoría de retículos (cf. H. Mehrtens, *Die Entstehung der Verbandstheorie*, Hildesheim: Gerstenberg, 1979).

10 Este tercer prólogo es fundamental; las "dudas" a que se refiere son por supuesto las antinomias de la teoría de conjuntos. El tema era conocido para él desde mucho antes; a instancias de Cantor, Bernstein visitó a Dedekind en 1897 para hablarle del descubrimiento de las antinomias. "Dedekind no había llegado entonces a una opinión definitiva, y me confesó que en sus reflexiones había llegado casi a dudar si el pensamiento humano es totalmente racional" (cit. por E. Noether en *Werke*, t.III, p.449). La solución que busca Dedekind apunta a realizar una investigación que parece más lógico-filosófica que lógico-matemática; esto es de nuevo coherente con su logicismo.

11 Conviene aclarar el motivo de que Dedekind denominara a los conjuntos 'sistemas'. Ante todo, sucede que en alemán no existía una palabra especialmente apropiada para nombrar el concepto de conjunto. Dedekind comenzó utilizando los términos 'dominio' [Gebiet], 'complejo' [Complex] y 'sistema' [System] en los años 50 –cf. Introducción, § 3–, pero desde 1872 al menos se decantó por la última palabra para la noción general del conjunto. Como muestra de la complejidad que introdujo la falta de una terminología 'natural' en alemán, baste decir que tanto Dedekind como Cantor estaban de acuerdo en utilizar el término francés 'ensemble' como traducción, pero el segundo no empleó ninguno de los términos alemanes utilizados por el primero: usó 'colección' [Inbegriff] en 1874, desde 1878 a 1891 'variedad' [Mannigfaltigkeit], y finalmente –a partir de 1895– empleó la palabra 'Menge', que es el término empleado actualmente en ese idioma. Por eso Dedekind se ve obligado a indicar varios equivalentes de su 'sistema'; entre ellos destaca la palabra 'variedad', introducida por Riemann en 1854 y luego retomada por Cantor, siempre en el sentido general de conjunto y no en su acepción técnica actual. Para facilitar la lectura, y atendiendo al espíritu más que a la letra, nos hemos tomado la libertad de traducir 'Inbegriff' por conjunto.

12 Leyendo los puntos 2 y 3, Frege creyó ver que Dedekind no había conseguido un concepto puramente formal de conjunto y se había quedado en la idea de agrupación material (cf. Frege, Grorundgesetze, o.c., vol. 1, introducción a la parte I). A este defecto

achacaba: (a) la indistinción de las relaciones de pertenencia e inclusión, (b) la imposibilidad de concebir un conjunto unitario (que desde un punto de vista material es siempre una cosa, no un conjunto), (c) la inexistencia del conjunto vacío. Desde luego Dedekind no fue claro a este respecto, pero es evidente que las acusaciones de Frege son exageradas, como muestran el final de la carta a Weber del 24.01.1888, y el trabajo sobre la segunda definición de finito e infinito, mencionada en el segundo prólogo, trabajo que puede encontrarse en *Werke*, III.

13 En general, Dedekind fue muy cuidadoso en la elección de la terminología y simbolismo. El símbolo para la *comunidad* o intersección de conjuntos es 𝔊 [G gótica] porque 'comunidad' se dice 'Gesamtheit'; el símbolo para la *composición* de sistemas (8) es 𝔐 [M gótica] porque 'compuesto' se dice 'zusammengesetzt', con dos emes.

14 Aquí se acaba la parte del escrito dedicada propiamente a la noción general de conjunto. Está claro que la 'composición' de Dedekind no es otra cosa que nuestra unión, así como la 'comunidad' es nuestra intersección. Es llamativo que el aparato de operaciones introducido por Dedekind es bastante pobre: solo esas dos operaciones, sin ninguna referencia a otras más potentes como la formación del conjunto potencia, o del producto cartesiano de dos conjuntos. Estas últimas –o más bien, correlatos suyos– serían empleadas por Cantor para acceder a cardinales mayores, pero es evidente que no era la intención de Dedekind ofrecer una exposición de la teoría de conjuntos transfinitos. Los conjuntos le interesan a Dedekind principalmente como soportes de estructuras, lo que determina un punto de vista algebraico alejado del de Cantor; las estructuras se caracterizarán por medio de aplicaciones, y de ahí que la noción de 'representación' vaya a convertirse en el verdadero centro del escrito.

A fin de cuentas, la traducción del término no debe resultar demasiado importante: el propio Dedekind enfatizó una y otra vez que una teoría bien construida debía exprimir explícitamente el significado de las nociones empleadas, de modo que cualquier término técnico fuera reemplazable por una palabra sin significado.

15 El concepto de aplicación de Dedekind es el concepto moderno en toda su generalidad, y aparece aquí por vez primera en la historia de la matemática. El término empleado por el autor es 'Abbildung', y los matemáticos alemanes siguen usándolo para denotar aplicación; esto constituía un argumento a favor de traducirlo simplemente de la forma habitual. Pero 'Abbildung' es una palabra muy polisémica: significa 'representación', 'imaginación', e incluso 'pintura', cosa que justifica que hablemos de 'originales' e 'imágenes'. Por otro lado, la palabra 'aplicación' no parece especialmente apropiada para el uso que le dan los matemáticos, y como la terminología de Dedekind es en general muy alejada de la nuestra, he pensado que no había inconveniente en utilizar 'representación' (aunque no ignoro que tiene otros usos técnicos en matemáticas). Esta palabra permite formar términos derivados con más comodidad, parece en principio más apropiada que 'aplicación' para lo que se quiere expresar, y sugiere connotaciones mentalistas o logicistas que caracterizan muy bien la posición de Dedekind en filosofía de la matemática.

16 La condición que impone Dedekind a las representaciones similares coincide exactamente con la que caracteriza nuestras aplicaciones inyectivas, pero las emplea como nosotros utilizaríamos aplicaciones biyectivas. La causa es sin duda que le parece trivial el paso de una aplicación inyectiva a una biyectiva, lo que se consigue simplemente restringiendo el conjunto final al imagen. Por eso se discute aquí el concepto de aplicación inversa, y de ahí que en una carta a Weber escriba: "similar (e.d. unívocamente invertible)" (cit. por Noether en *Werke*, III, 459). Para convencerse de que pese a todo su concepto

de aplicación es el general, cf. punto 36, donde se considera una aplicación ϕ de S en Z donde $\phi(S)$ no es igual a Z.

17 R y S son, en nuestra terminología, equipotentes o equivalentes; esta noción es la base del concepto de número cardinal, y de su extensión, la noción de potencia de un conjunto, en que se basa la teoría cantoriana.

18 He aquí los números de Frege: cada una de estas clases *es* un número (finito o transfinito), al menos según la reformulación conjuntista habitual de las ideas de Frege.

19 La definición de cadena de un sistema ofrece un ejemplo clásico de un tipo de definiciones que serían criticadas por Poincaré y otros autores constructivistas, que las consideraron responsables de antinomias. Las definiciones impredicativas determinan un objeto por medio de un conjunto que contiene ya al objeto en cuestión; en nuestro caso, la cadena A_0 es la intersección de todas las cadenas que contienen a A, entre las cuales se encuentra, naturalmente, A_0. Cf. Poincaré, 'Los últimos esfuerzos de los logísticos', en *Ciencia y método,* Madrid: Espasa, 1963, pp. 137-151.

20 El teorema 63 puede emplearse como base para demostrar el teorema de Schröder-Bernstein, básico para la teoría de conjuntos, cuya demostración dio Dedekind en 'Representación similar (clara) y sistemas similares'. La demostración es básicamente la que daría en 1908 Zermelo, quien escribió que "puede ser considerada clásica", y se extrañó de que ni Cantor (que la conoció en 1899) ni Dedekind se hubieran decidido a publicarla. Ciertamente resulta raro que Dedekind incluyera el esotérico contenido del punto 63 sin dar más aclaraciones sobre su alcance. El lector puede encontrar un intento de explicación de este pequeño "misterio" en mi 'On the Relations between Cantor and Dedekind', *Historia Mathematica* (1993), o.c., así como en *El nacimiento de la teoría de conjuntos*, citado en la bibliografía.

21 Lo que se pretende con este teorema queda claro en la carta a Keferstein: "Sin una prueba lógica de existencia permanecería siempre dudoso si la noción de un tal sistema (infinito) no contendrá quizá contradicciones internas." Hay que resaltar que Dedekind no pretende establecer la existencia 'exterior' del infinito en la realidad física o en alguna realidad ideal, sino solo su existencia 'mental', es decir, su consistencia. Dedekind había sido siempre partidario del infinito actual, y fue su conciencia clara del problema de la consistencia en matemáticas lo que le llevó a intentar demostrar la consistencia de la idea de conjunto infinito. Diversos testimonios de la época nos confirman que en aquel momento no se concebía ninguna demostración de consistencia que no pasara por mostrar la existencia de un modelo (cf. I. Grattan-Guinness (ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910,* Madrid: Alianza, 1984, p. 301). Con esto, Dedekind trató de ahondar más que cualquiera de sus antecesores, y que la mayoria de sus sucesores, que se conformaron simplemente con la postulación axiomática del infinito. Otro incentivo para demostrar, y no postular, la existencia (mental) del infinito es que al parecer su posición epistemológica respecto a la matemática le llevaba a evitar formulaciones axiomáticas: todo debía ser resultado de las puras leyes del pensamiento y de nociones basadas únicamente en la lógica, todo debía ser demostrado.

Pero, como se sabe, el recurso a la idea de 'universo mental' hace que el teorema sea sospechoso de dar lugar a antinomias: entre las "cosas que pueden ser objetos de mis pensamientos" están todos los conjuntos (recuérdese que todo conjunto es una cosa, punto 3), y por tanto también todos los conjuntos antinómicos. Este es el motivo de que el enfoque de Dedekind fuera abandonado.

Como Dedekind reconoce, su teorema del infinito es análogo a otro de Bolzano; Dedekind conoció la obra de Bolzano en 1882, al enviársela Cantor (carta del 7.10.1882 en Dugac, o.c., 256), de modo que la influencia de este autor llegó solo cuando las ideas fundamentales del escrito estaban ya listas (me refiero a la definición de infinito, la noción de cadena, la definición del sistema simplemente infinito). Es interesante observar que entre la prueba de Bolzano y la de Dedekind hay diferencias significativas. Para empezar, Dedekind cuenta con una definición precisa de infinito, y gracias a ella puede hacer más riguroso el desarrollo de la prueba (son especialmente importantes las condiciones de similaridad y existencia de un elemento base). Pero además la prueba de Bolzano considera el conjunto de todas las verdades, donde si A es una proposición verdadera. 'A es verdadera' también lo es; Bolzano, como Frege, tiene una proposición platónica, realista, ante los objetos de las matemáticas y de la lógica. Dedekind, por el contrario, resulta siempre coherente con una posición mentalista, en el sentido de que los objetos matemáticos no existen fuera de la mente del matemático; de ahí que transforme la prueba y considere el conjunto de nuestros posibles objetos de pensamiento. Vale la pena decir que desde los planteamientos de su época era natural considerar que el 'universo mental' es una noción puramente lógica: es posible pensar todo aquello que no sea contradictorio, de modo que es la lógica quien determina los límites de mi universo mental.

22 Los axiomas de Peano son equivalentes a estas condiciones definitorias de los sistemas simplemente infinitos; además el propio Peano reconoció haber utilizado el libro de Dedekind (cf. la introducción a *Arithmetices principia*, Oviedo: Pentalfa, 1979). Según H. C. Kennedy, Peano descubrió independientemente sus axiomas; cf. 'Peano's concept of number', *Historia Mathematica* 1 (1974), 387-408. También Zermelo se basó en esta misma definición para postular, en su axioma de infinito, un conjunto que (al menos) contiene un sistema simplemente infinito, y que por tanto sirve como modelo de la aritmética (cf. 'Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I', trad. inglesa en van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, 1967, p. 204). La condición más sutil es la ß, porque en ella interviene la noción de cadena de un sistema, que asegura la validez del principio de inducción y evita la aparición de números no estándar; cf. el punto 6 de la carta a Keferstein.

23 Se trata aquí de demostrar que todos los sistemas simplemente infinitos son isomorfos, con lo que se prueba la categoricidad de la definición 71. Vemos pues que todos los aspectos de la cuestión de los modelos no estándar, indicada en la carta a Keferstein, se reflejan perfectamente en la exposición.

24 Esta complicada prueba de la inversa del teorema 159 envuelve el empleo del axioma de elección, como señaló Zermelo ya en 1904 (cf. la trad. inglesa en van Heijenoort, o.c., 188). Se establece como condición del teorema que para todo n existe una aplicación biyectiva arbitraria α_n de Z_n en Σ; a partir de aquí, nuestro objetivo es definir una aplicación biyectiva (representación similar) χ de N en Σ. No podemos obtenerla componiendo directamente las aplicaciones arbitrarias α_n, porque entonces ni siquiera está garantizado que obtengamos una aplicación (un mismo n puede tener muchas imágenes); necesitamos una nueva serie de aplicaciones compatibles entre sí. Para comprender el resto del proceso, lo más cómodo es imaginárselo como una construcción: partimos de $\alpha_1(Z_1) = \psi_1(Z_1)$; ahora, dada ψ_n determinamos $\psi_{n'}(Z_{n'})$ escogiendo un k perteneciente a $\alpha_{n'}(Z_{n'})$ que no esté contenido en $\psi_n(Z_n)$ –Dedekind demuestra que deben existir tales elementos k– , y haciendo $\psi_{n'}(n') = k$, $\psi_{n'}(Z_n) = \psi_n(Z_n)$. La construcción de la aplicación biyectiva χ de N en Σ supone por tanto la 'elección' de un infinitos elementos k, precisamente uno por cada $\alpha_{n'}$. Reformulándolo de modo que la aplicación del axioma resulte más evidente,

tenemos infinitos conjuntos $\alpha_n(Z_n)$ y queremos obtener un y solo un elemento a_n de cada uno de los $\alpha_n(Z_n)$, siendo todos los a_n distintos entre sí. Por tanto, para considerar χ como algo dado necesitamos apelar al axioma de elección en su versión numerable.

En algunos trabajos de historiadores puede encontrarse una interpretación distinta, y a mi entender errónea, del modo en que el axioma de elección interviene en el teorema; se trataría de que Dedekind postula que el conjunto de aplicaciones de cada Z_n en S es no vacío, pasando a elegir una aplicación para cada Z_n por medio del axioma de elección (implícito). En primer lugar, Dedekind no parece presentar así las hipótesis; pero además, si aceptamos esta interpretación del teorema, el axioma de elección no interviene un sola vez, sino dos, cosa que parecen haber pasado por alto los historiadores en cuestión. Cf. el artículo de R. Bunn en Grattan-Guinness (ed.), o.c., 321, así como J. Cassinet, 'Liens entre l'infini et l'axioni et l'axiome du choix' , *Structures in Mathematical Theories* (Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, 1990), 231-232, y J. Cavaillès, *Philosophie mathématique* (París: Hermann, 1961), 140, nota 2; esta interpretación se originó al parecer en G. Hessenberg, 'Grundbegriffe der Mengenlehre', *Abhandlungen der Fries'schen Schule*, **1** (1906), 479-706.

25 Ya en el primer prólogo señala Dedekind que el concepto de número cardinal es "realmente muy complicado". En su exposición, la posibilidad de asignar a cada sistema finito Σ un número *n* (por tanto, no la condición de unicidad de esta asignación, sino la condición de existencia) depende de la complicada demostración inversa de 159, y por tanto del axioma de elección.

Notas a los *Fragmentos sobre aritmética y teoría de conjuntos.*

1 Dedekind era perfectamente consciente del hecho de que el conjunto de los enteros (Z) es numerable; lo que resalta en esta frase es que toda enumeración se hace sobre la base de una ordenación, y Z no es numerable bajo cualquier orden. La aplicación de N en Z que sigue el orden habitual, en el que a cada número natural corresponde una clase positiva, no puede extenderse a todo elemento de Z (no es ni puede hacerse sobreyectiva). La idea de que enumerar presupone ordenar constituye precisamente el punto de vista básico del análisis del número natural realizado por Dedekind, contrastando con el de Frege.

2 El texto publicado dice 'cadena-imagen' y sigue al manuscrito, pero es evidente que se trata de un error: *U* no está contenido en la cadena-imagen de *U*, de modo que si $s3U$, tendríamos que hacer -según la definición que viene a continuación- $\psi(s)=s$ y por tanto no contenido en *T*, con lo que perderíamos el principal objetivo de que $\psi(S)=T$.

3 El texto publicado pone $\psi(S)=\mathfrak{M}(\psi(V_0),V)$, que es claramente un error de lectura del manuscrito.

Notas a la *Correspondencia.*

1. El requisito que Dedekind propone aquí para la consistencia es tan fuerte que evidentemente las axiomáticas actuales no lo satisfacen. Vale la pena indicar que durante el siglo XIX no existe la idea de prueba de consistencia formal, introducida por Hilbert; solo se concebían pruebas de consistencia mediante un teorema de existencia. Todavía

en 1910 escribe Russell: "la ausencia de contradicción no se puede demostrar en ningún caso, salvo demostrando primero la existencia: es totalmente imposible efectuar todas las deducciones a partir de unas hipótesis dadas, y probar que ninguna de ellas incluye una contradicción" (tomando de la recesión de un libro de G. Mannoury *Mind* 19 (1910), y citado en I. Grattan-Guinness (ed.), o.c., p 301).

2 Se refiere al *Lehrbuch der Analysis* [Manual de Análisis] que Lipschitz estaba preparando por entonces, y cuyo vol. 1 se publicó en Bonn: Cohen, 1877.

3 Se trata de una cita de los *Hechos de los apóstoles,* cap. 17, ver. 18-19; cf. Dugac, o.c., 273.

ÍNDICE ALFABÉTICO